ŠTRUKTURÁLNE VLASTNOSTI A STAVOVÁ ZLOŽITOSŤ UNÁRNYCH OPERÁCII NA KONEČNOSTAVOVÝCH AUTOMATOCH

autor: Bc. Šimon Javorský
vedúci: RNDr. Juraj Šebej, PhD.

Úvod a motivácia

- operačná stavová zložitosť
  - 1994
    - Yu, Zhuang, Salomaa, The state complexities of some basic operations on regular languages (1994)
  - 2020
    - Jirásek, Jirásková, Multiple concatenation and state complexity (2020)
  - 2020
    - Okhotin, Sazhneva, State complexity of gf(2)-inverse and gf(2)- star on binary languages (2020)

- modely
  - deterministický konečnostavový automat (DFA)
  - nedeterministický konečnostavový automat (NFA)
  - alternujúci automat (AFA)

- operácie
  - kleenov uzáver (Kleene star)
  - pozitívny uzáver (Plus)
  - štvorec (Square)

Stavová zložitosť

- stavová zložitosť jazyka L, sc(L)
- počet stavov najmenšieho DFA akceptujúceho L
  - „Pre každý jazyk existuje unikátny minimálny deterministický automat, ktorý ho akceptuje (až po izomorfizmus).“
    - Hopcroft, Motwani, Ullman, Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation (2006)

- Príklad sc(L*) pre n=5
  - všetky jazyky nad unárnou abecedou so stavovou zložitosťou 5
  - všetky minimálne päťstavové unárne DFA
  - aplikácia Kleene star a minimalizácia
  - výsledkom sú automaty s počtom stavov 1 až 17 (s výnimkami)
  - rozsah zložitosti sc(L*) je $1 \leq \alpha \leq 17$

Stavová zložitosť

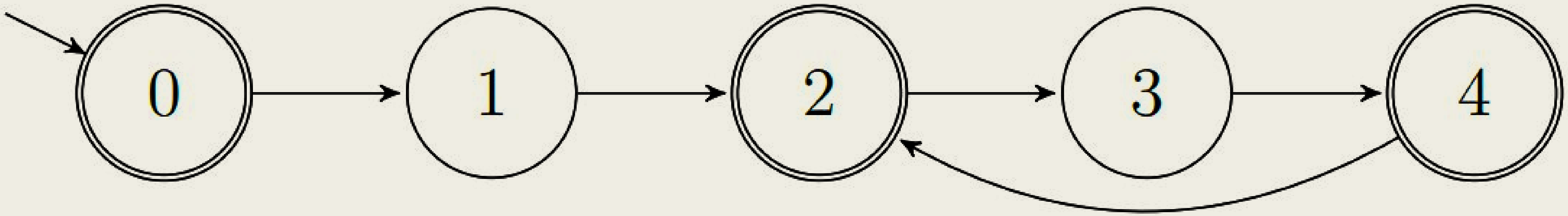
- problém zložitosti priemerného stavu
  - Nicaud, Average state complexity of operations on unary automata (1999)
- binárna a terárna abeceda a operácia štvorca
  - Krajňáková, Jirásková, Square on deterministic, alternating, and boolean finite automata (2017)
- existencia nedosiahnuteľných hodnôt z rozsahu stavových zložitostí
  - Geffert, Magic numbers in the state hierarchy of finite automata (2007)
- dve medzery nedosiahnuteľných hodnôt okolo n v rozsahu stavových zložitostí kleene star na unárnych jazykoch
  - Čevorová, Kleene star on unary regular languages (2013)

Stavová zložitosť

- obmedzenie na unárne automaty s polovičným počtom stavov akceptujúcich
  - „Jazyk je akceptovaný n-stavovým alternujúcim konečno stavovým automatom, práve vtedy keď je jeho reverz akceptovaný deterministickým konečno stavovým automatom s 2^n stavmi, pričom 2^{n-1} z nich sú akceptujúce."
    - Fellah, Jurgensen, Yu, Constructions for alternating finite automata (1990)
    - Hopcroft, Motwani, Ullman, Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation (2006)
    - Jiraskova, Descriptional complexity of operations on alternating and boolean automata (2009)
    - Krajňáková, Jirásková, Square on deterministic, alternating, and boolean finite automata (2017)

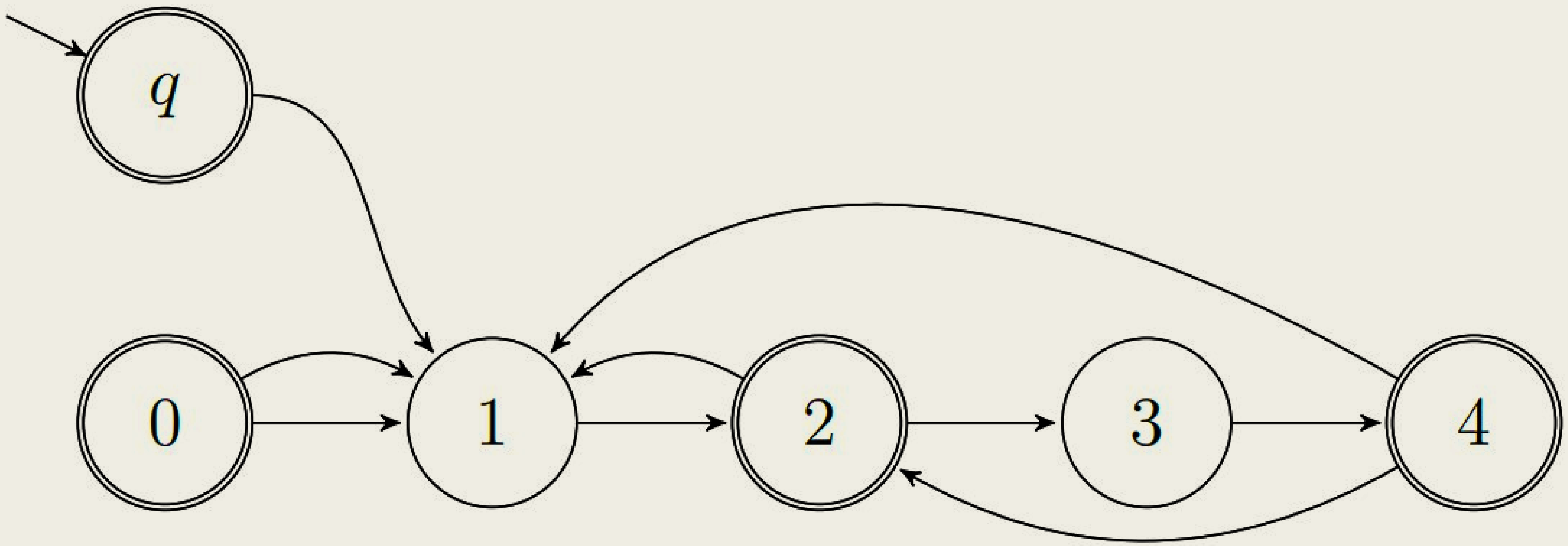
Príklad

- modifikovaná Nicaudová notácia
  - $\mathrm{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  - $\mathrm{M} = (n, l, F) = (5, 2, \{0, 2, 4\})$
  - $\mathrm{M} = (5{,}2{,}10101)$



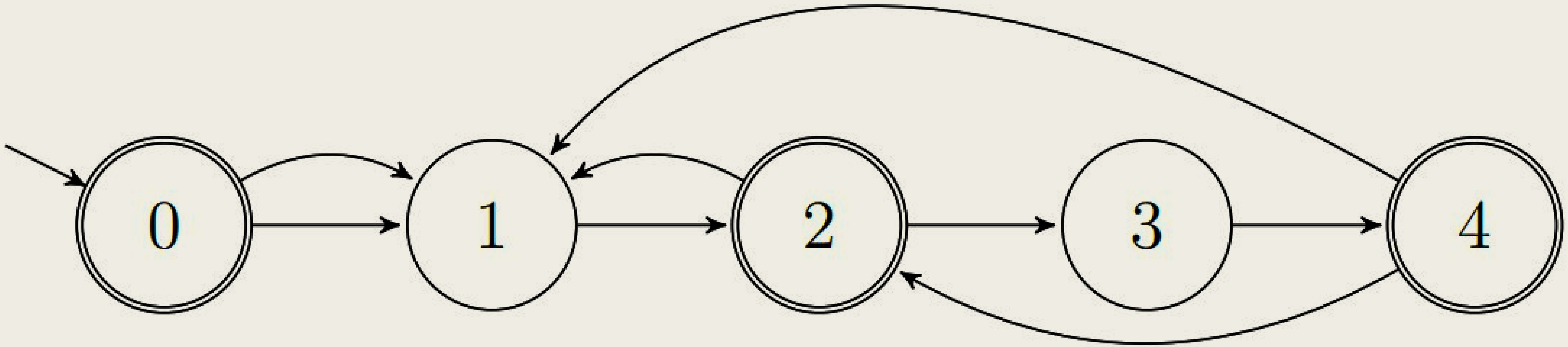
Príklad

- konštrukcia kleene star
  1. pridať nový akceptujúci stav q s prechodom na stav 1
  2. nastaviť stav q ako je jediný počiatočný
  3. pridať prechod z každého akceptujúceho stavu do stavu 1



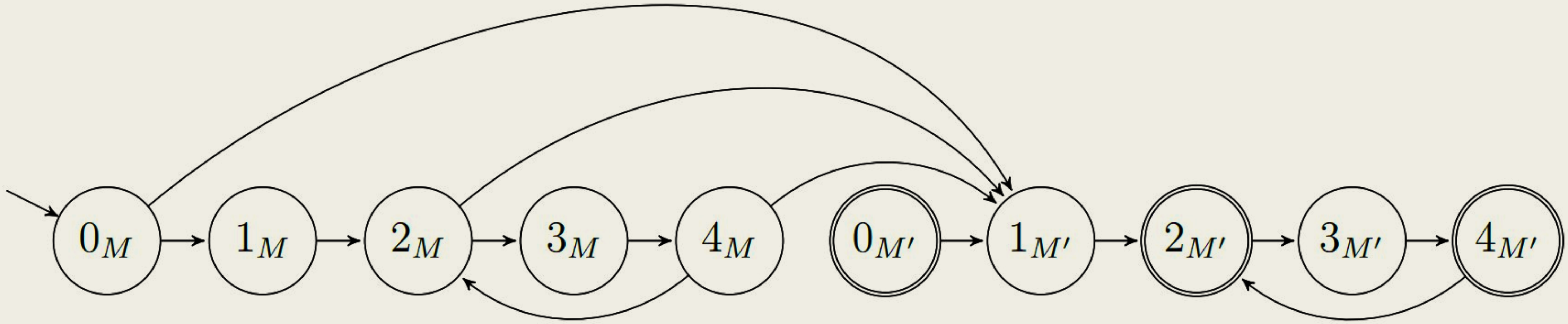
Príklad

- konštrukcia plus
  1. pridať prechod z každého akceptujúceho stavu do stavu 1



Príklad

- konštrukcia square
    1. vytvoriť kópiu M' automatu M
    2. pridať prechod z každého akceptujúceho stavu M do stavu $1_{M'}$
    3. nastaviť všetky stavy v M ako neakceptujúce



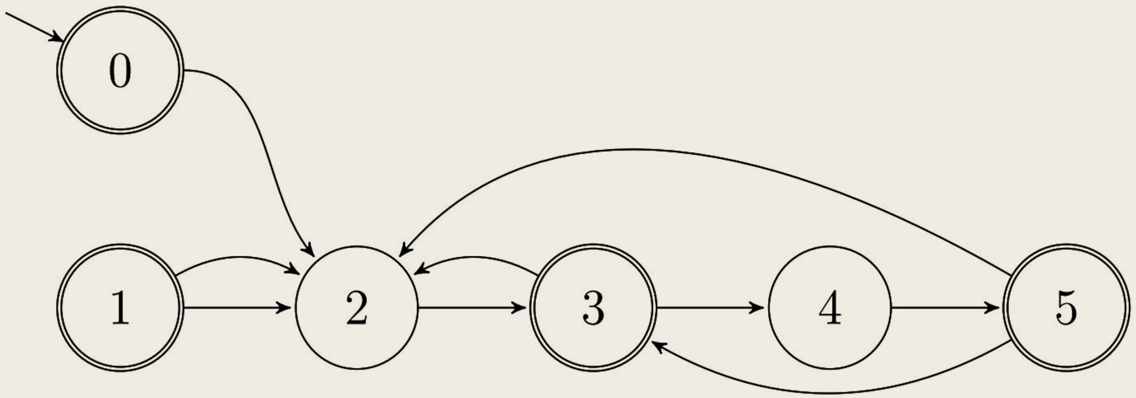
Príklad

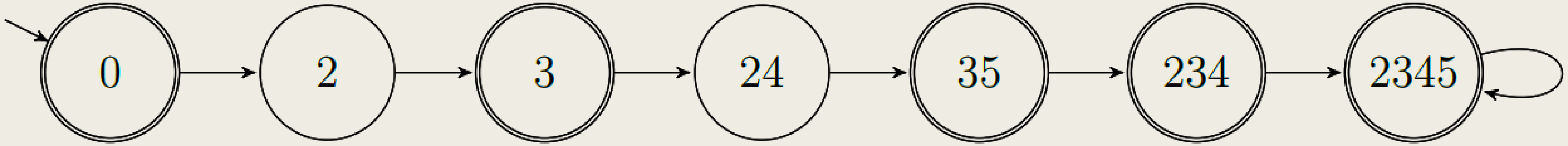
- konštrukcia podmnožín
  - z NFA $\mathrm{N} = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ na DFA $\mathrm{D} = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$
    - Q_D je množina podmnožín Q_N
    - F_D je množina podmnožín $S \in Q_N$ takých, že $\mathrm{S} \cap F_N \neq \emptyset$
    - pre každú množinu $S \in Q_N$ a pre každý vstupný symbol $\alpha \in \Sigma$ platí

$$\delta_D(S, \alpha) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, \alpha)$$

Príklad

- konštrukcia podmnožín





Generovanie

- zvoľ veľkosť automatu *n*
- pre každé *l* od *0* po *n-1* opakuj
  - pre každé *stavy* z množiny všetkých kombinácií *0* a *1* dĺžky *n* opakuj
    - ak $stavy[l-1] \neq stavy[n-1]$
      - *stavySlucky* <- podzoznam stavy od *l* po *(n-1)*
      - ak *stavySlucky* je veľkosti prvočísla a obsahuje aj *0* aj *1* potom
        - spracuj automat *(n,l,stavy)*
      - inak
        - *M* <- automat *(n-l,0,stavySlucky)*
        - *M*‘ <- minimalizovaný *M* pomocou Hocroftovho algoritmu
        - ak *M* = *M*‘ potom
          - spracuj automat *(n,l,stavy)*

Generovanie - optimalizácia

- "Unárny automat *(n,l,F)* je minimálny práve vtedy keď sú splnené obe podmienky:
  1. jeho slučka je minimálna,
  2. stavy *(n-1)* a *(l-1)* nemajú rovnakú finalitu."
     - Nicaud, Average state complexity of operations on unary automata (1999)

- "Majme p-stavový automat *M*, kde *p* je prvočíslo, navyše *M* spĺňa $\delta(i,\alpha) = i + 1\, mod\; p$ pre všetky $i \;\in Q$. Ak existuje stav $j \in F$ a stav $k \notin F$, potom je automat M minimálny."
  - Hopcroft, Motwani, Ullman, Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation (2006)

Spracovanie

- $M_1 \leftarrow$ nedeterministický automat získaný aplikovaním vybranej operácie
- $M_2 \leftarrow$ deterministický automat získaný aplikovaním konštrukcie podmnožín na M_1
- $M_3 \leftarrow$ minimálny automat získaný aplikovaním Hopcroftovho algoritmu na M_2
- $m \leftarrow \max\{$veľkosti vo $f\}$
- ak $|M_3| \in f$ potom
  - ak $\mathrm{m} = |M_3|$ potom
    - pridať M_3 k príkladom $\mathrm{f}[m]$
  - zvýšiť počítadlo $\mathrm{f}[|M_3|]$
- inak
  - ak $\mathrm{m} < |M_3|$ potom
    - odstrániť všetky príklady z $\mathrm{f}[m]$ okrem prvého
  - pridať $|M_3|$ do f s počítadlom 1 a príkladom M_3

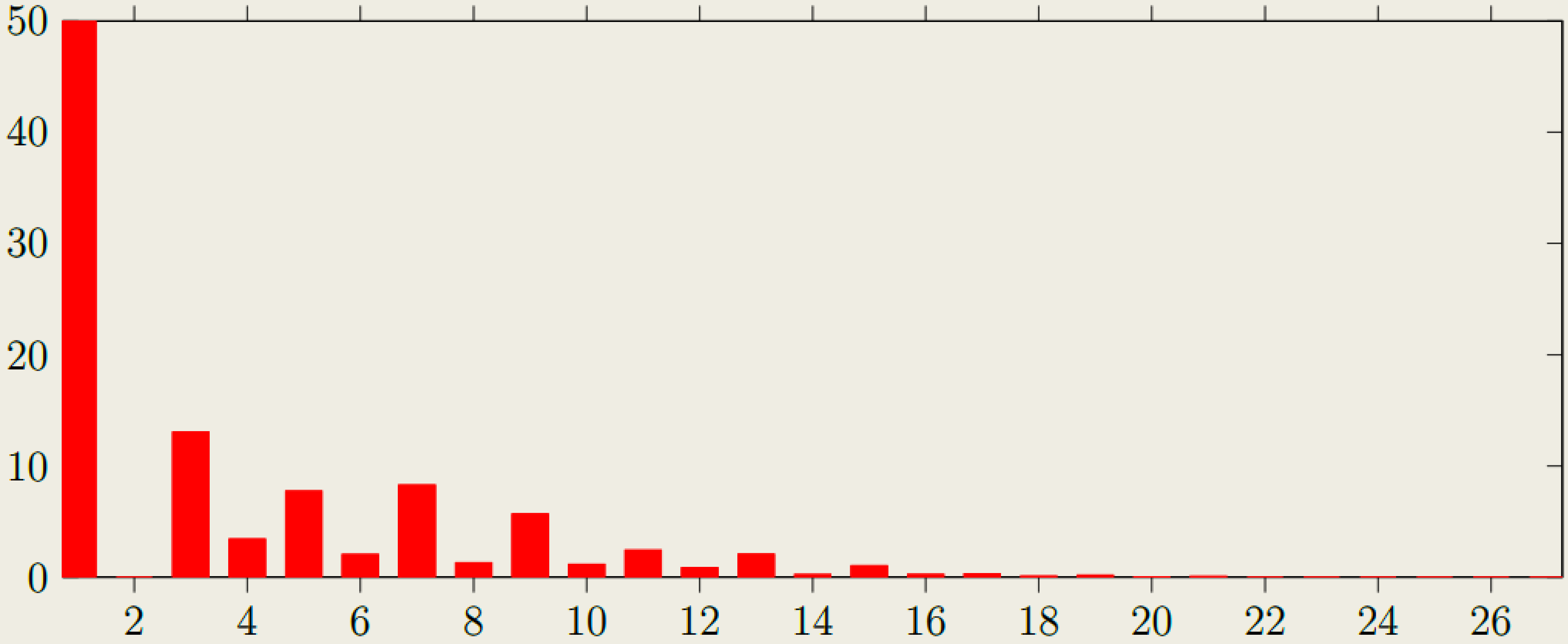
Spracovanie

- maximálne dosiahnuté stavové zložitosti
- vzorce v stavových zložitostiach
- absencia konkrétnych stavov
- počty vygenerovaných automatov
- štruktúry vygenerovaných automatov
- iné zaujímavé úkazy

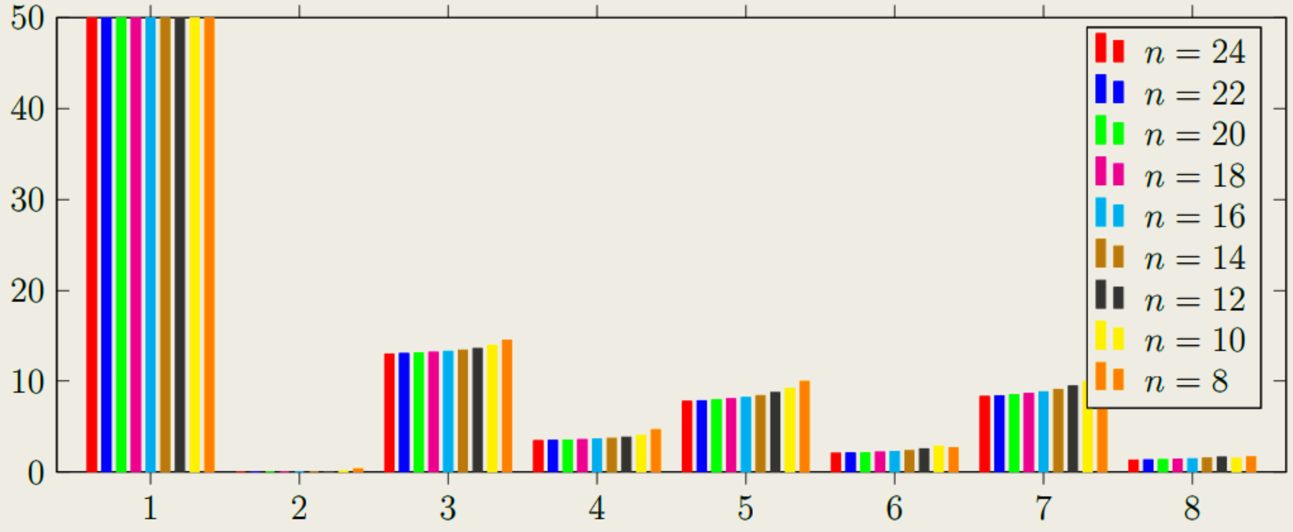
Výsledky - Kleene star

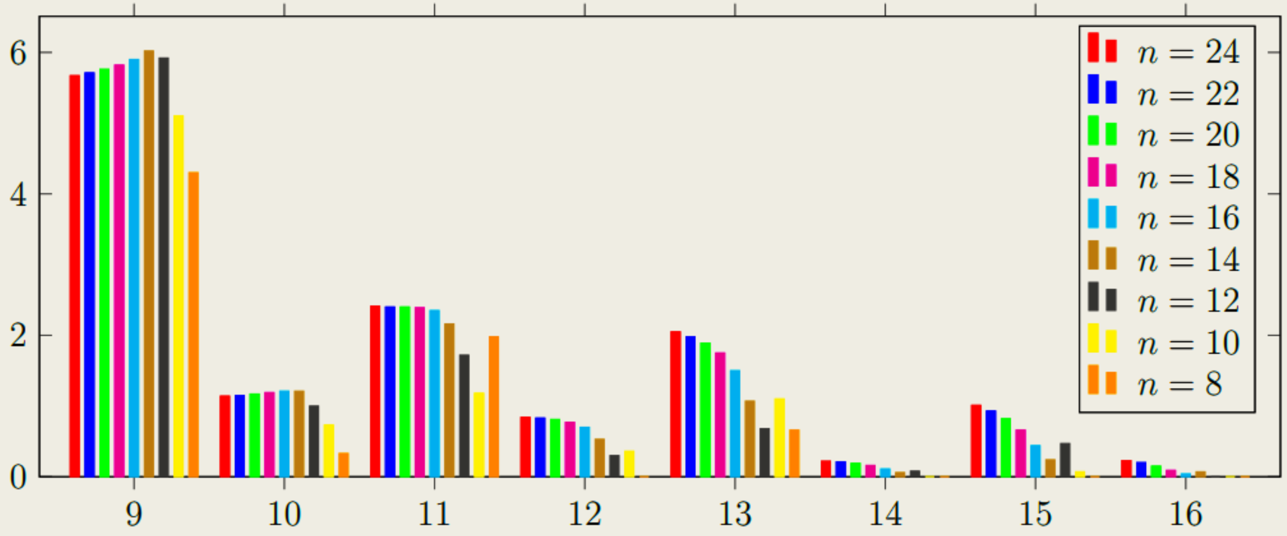
Veľkosť	Max.	Počet	Typ	Príklad
24	27	371	1	(24,0,TFFFFFFFFFFFFTTTTTTTTTTT)
22	27	3	3	(22,2,TFFTFFTFFTFFTFTTFTTFTT)
20	25	3	2	(20,2,TFFTFFTFFTFFTTFTTFTT)
18	21	117	1	(18,0,TFFFFFFFFFTTTTTTTT)
16	21	2	3	(16,2,TFFTFFTFFTFTTFTT)
14	19	2	2	(14,2,TFFTFFTFFTTFTT)
12	15	28	1	(12,0,TFFFFFFTTTTT)
10	15	1	3	(10,2,TFFTFFTFTT)
8	13	2	2	(8,2,TFFTFFTT)
6	13	1	1	(6,2,TFFFTT)
4	7	1	-	(4,0,TFFT)
2	2	2	-	(2,0,TF)

Výsledky - Kleene star



Výsledky - Kleene star

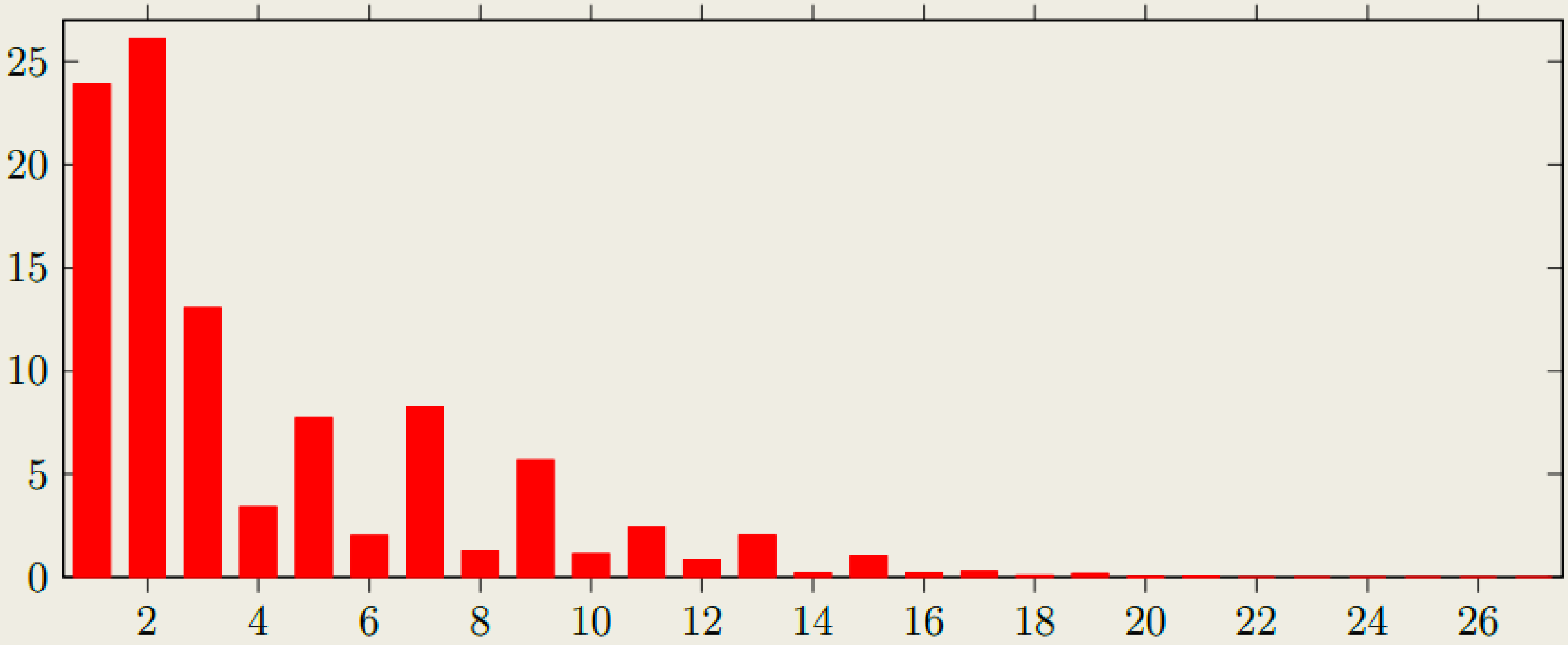




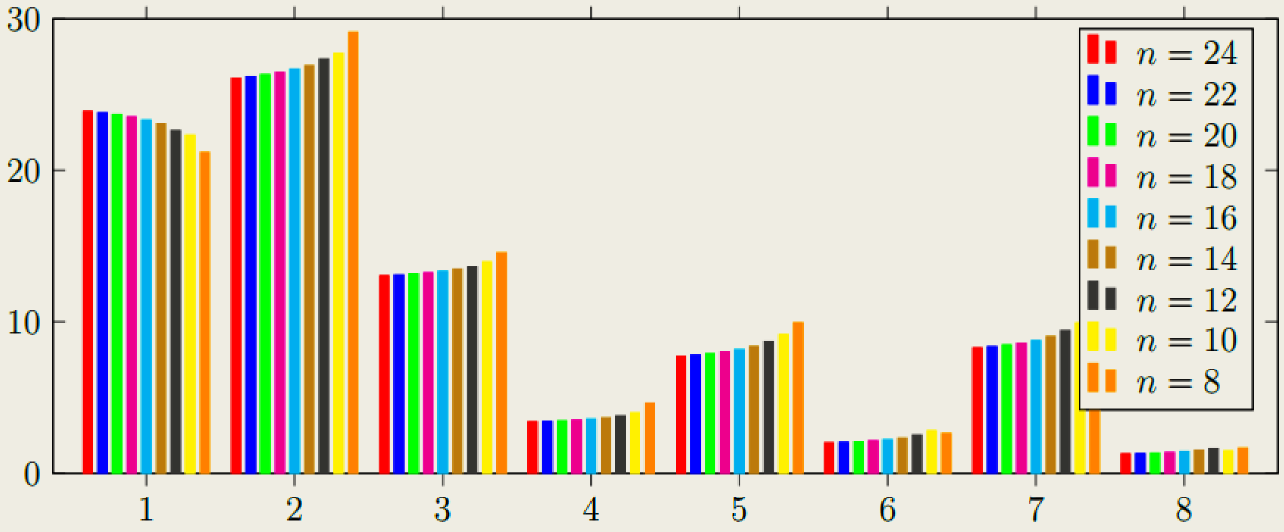
Výsledky - Plus

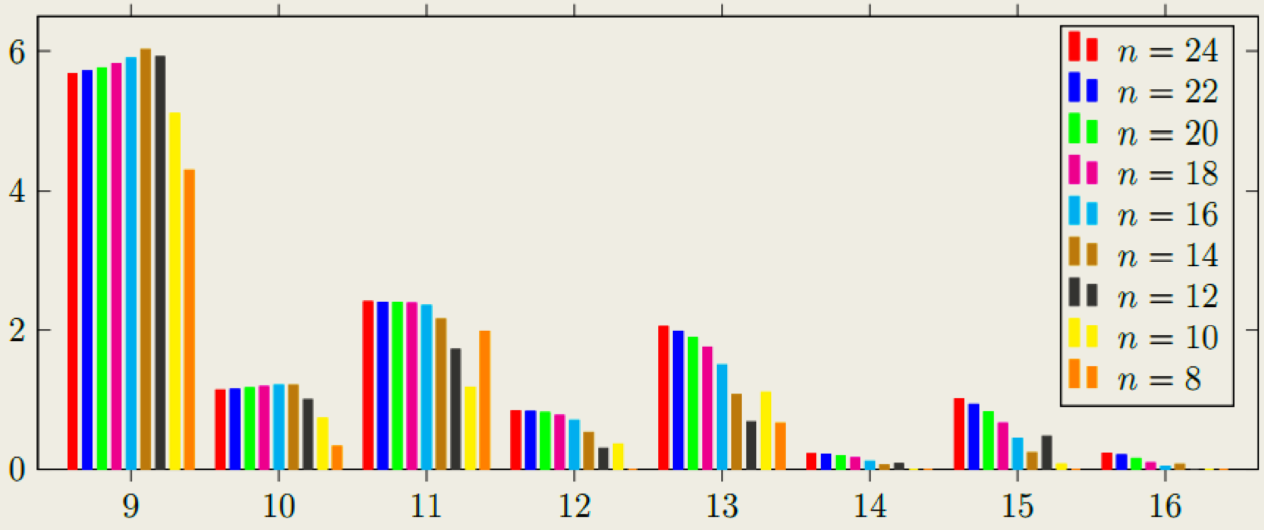
Veľkosť	Max.	Počet	Príklad
24	27	371	(24,0,TFFFFFFFFFFFFTTTTTTTTTTT)
22	27	3	(22,2,TFFTFFTFFTFFTFTTFTTFTT)
20	25	3	(20,2,TFFTFFTFFTFFTTFTTFTT)
18	21	117	(18,0,TFFFFFFFFFTTTTTTTT)
16	21	2	(16,2,TFFTFFTFFTFTTFTT)
14	19	2	(14,2,TFFTFFTFFTTFTT)
12	15	28	(12,0,TFFFFFFTTTTT)
10	15	1	(10,2,TFFTFFTFTT)
8	13	2	(8,2,TFFTFFTT)
6	13	1	(6,2,TFFFTT)
4	7	1	(4,0,TFFT)
2	2	2	(2,0,FT)

Výsledky - Plus



Výsledky - Plus

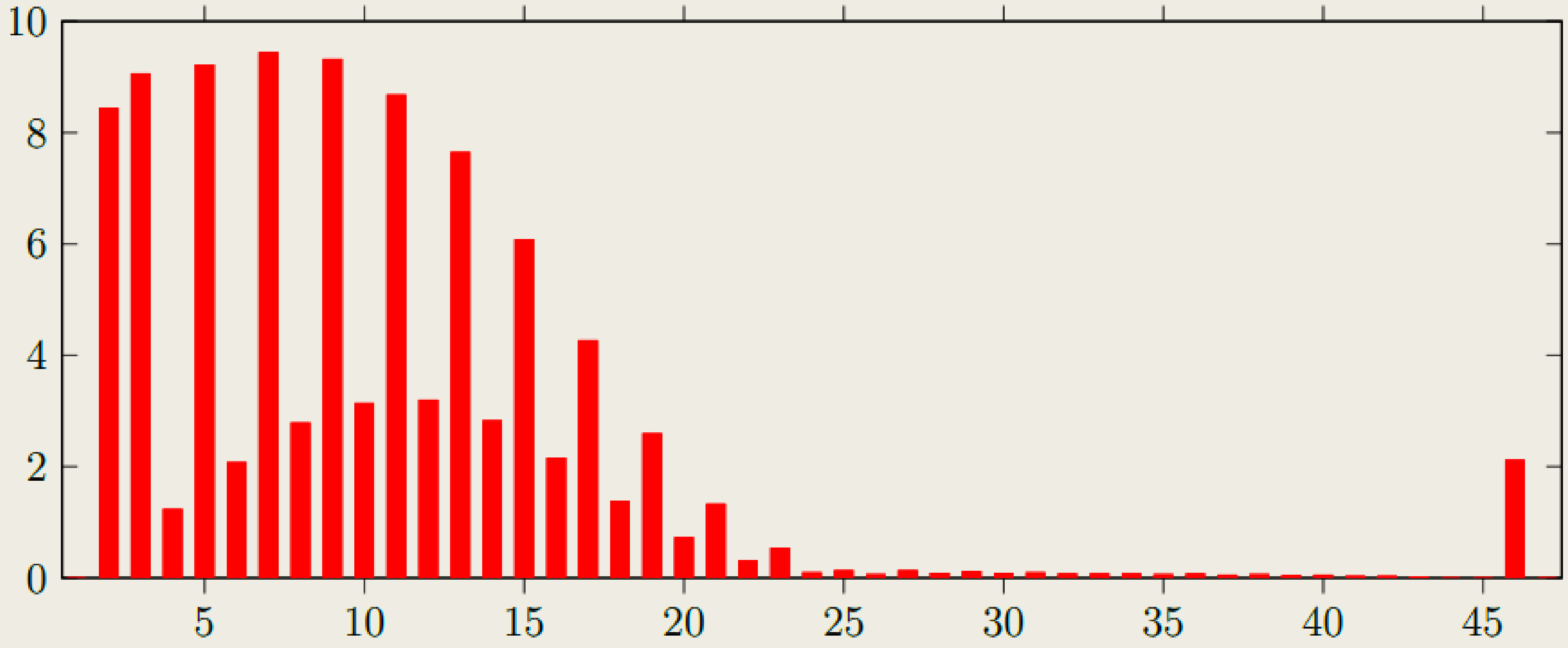




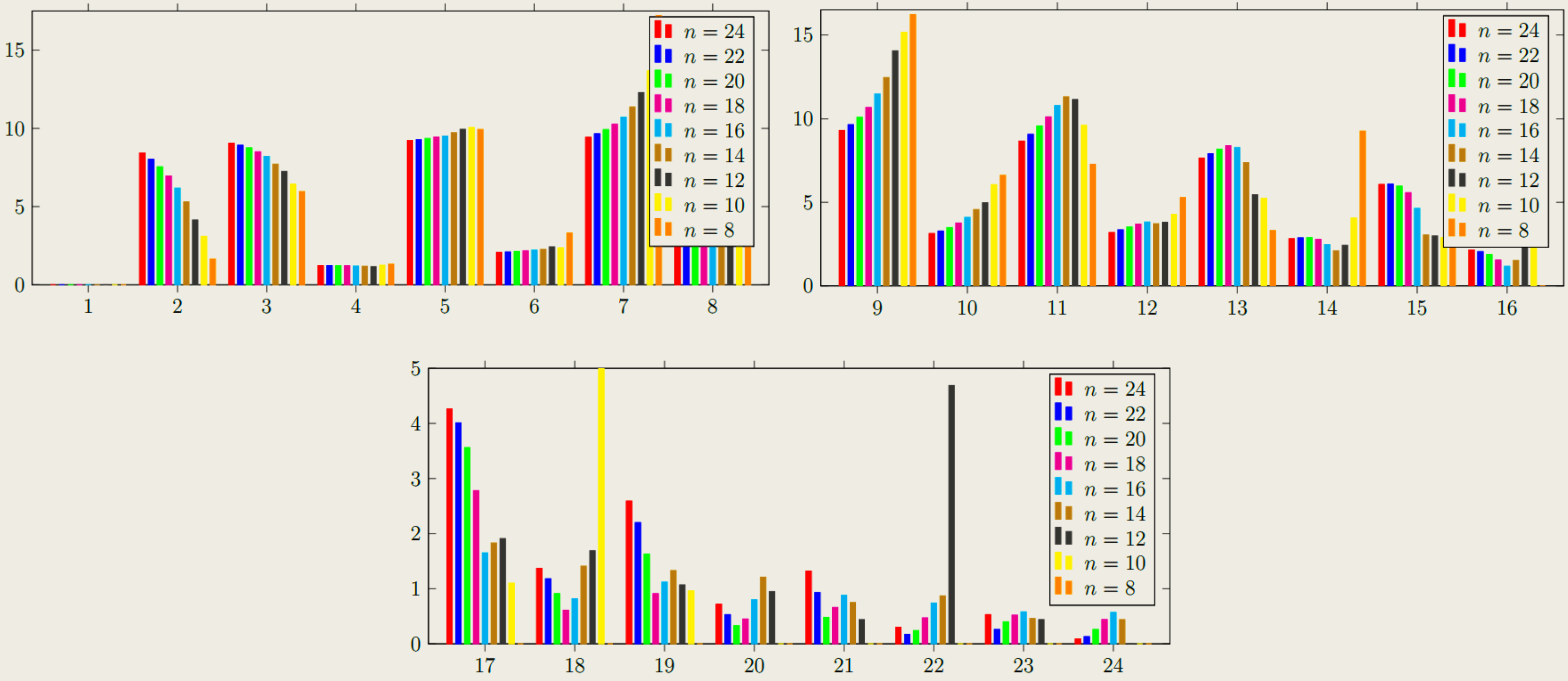
Výsledky - Štvorec

Veľkosť	Max.	Počet	Príklad
24	47	1730	(24,0,FFFFFFFFFFFFTTTTTTTTTTTT)
22	43	743	(22,0,FFFFFFFFFFFTTTTTTTTTTT)
20	39	368	(20,0,FFFFFFFFFFTTTTTTTTTT)
18	35	196	(18,0,FFFFFFFFFTTTTTTTTT)
16	31	79	(16,0,FFFFFFFFTTTTTTTT)
14	27	49	(14,0,FFFFFFFTTTTTTT)
12	23	26	(12,0,FFFFFFTTTTTT)
10	19	13	(10,0,FFFFFTTTTT)
8	15	7	(8,0,FFFFTTTT)
6	11	5	(6,0,FFFTTT)
4	7	2	(4,0,FFTT)
2	3	3	(2,0,FT)

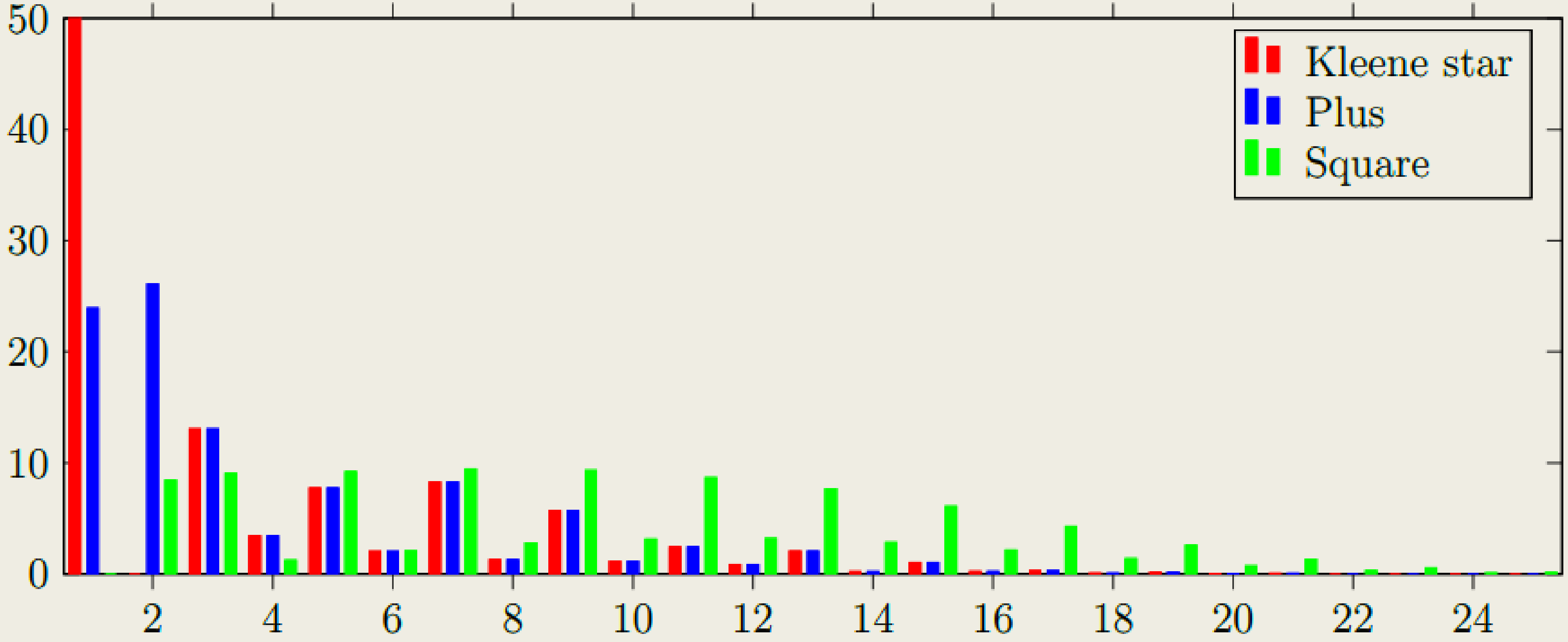
Výsledky - Square



Výsledky - Square



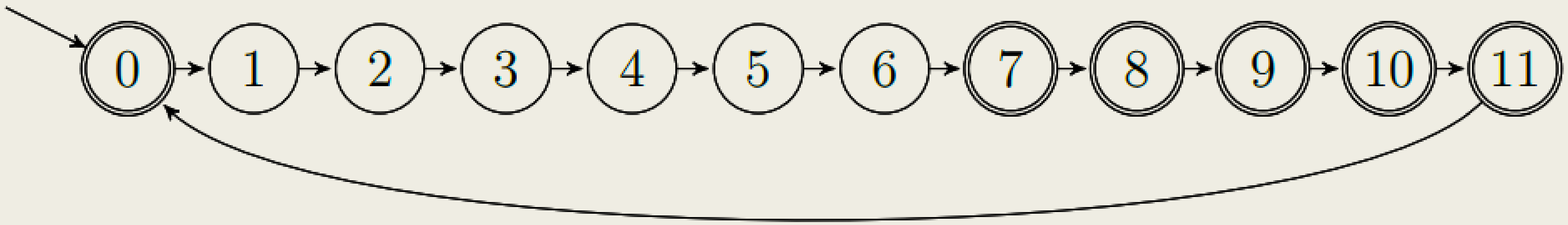
Výsledky - porovnanie



Typ I

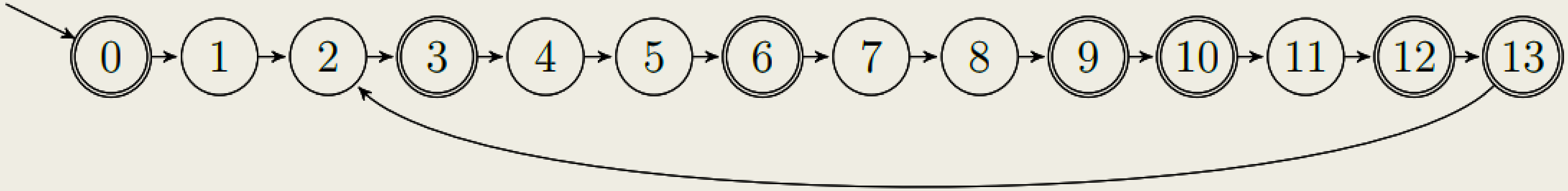
- $\mathrm{M} = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$
    - $\Sigma = \{\alpha\}$
    - $Q = \{i \in \mathbb{N}_0 | i < n, n = 6m, m \in \mathbb{N}\}$
    - $\delta(i, \alpha) = i + 1 \; mod \; n$
    - $I = \{0\}$
    - $F = \{0\} \cup \left\{\frac{n}{2}, \dots, n-1\right\}$

- príklady
    - (12,0,TFFFFFFTTTTT)
    - (18,0,TFFFFFFFFFTTTTTTTT)
    - (24,0,TFFFFFFFFFFFFTTTTTTTTTTT)



Typ II

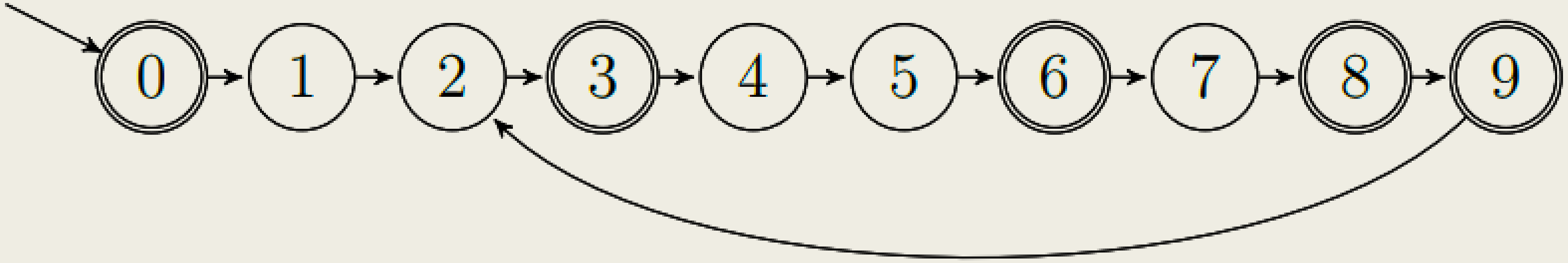
- $\mathrm{M} = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$
  - $\Sigma = \{\alpha\}$
  - $Q = \{i \in \mathbb{N}_0 | i < n, n = 6m + 2, m \in \mathbb{N}\}$
  - $\delta(i, \alpha) = \begin{cases} i + 1 & ak\ i < n - 1 \\ 2 & ak\ i = n - 1 \end{cases}$
  - $I = \{0\}$
  - $F = \{i | i \ mod\ 3 = 0\} \cup \left\{i \middle| i \ mod\ 3 = 2, \frac{n}{2} + 3 \leq i\right\}$
- príklady
  - (8,2,TFFTFFTT)
  - (14,2,TFFTFFTFFTTFTT)
  - (20,2,TFFTFFTFFTFFTTFTTFTT)



Typ III

- $\mathrm{M} = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$
  - $\Sigma = \{\alpha\}$
  - $Q = \{i \in \mathbb{N}_0 | i < n, n = 6m + 4, m \in \mathbb{N}\}$
  - $\delta(i, \alpha) = \begin{cases} i + 1 & ak\ i < n - 1 \\ 2 & ak\ i = n - 1 \end{cases}$
  - $I = \{0\}$
  - $F = \{i | i\ mod\ 3 = 0\} \cup \left\{i \middle| i\ mod\ 3 = 0, \frac{n}{2} + 3 \leq i\right\}$

- príklady
  - (10,2,TFFTFFTFTT)
  - (16,2,TFFTFFTFFTFTTFTT)
  - (22,2,TFFTFFTFFTFFTFTTFTTFTT)



Výsledky

Veta

“Pre každé n=6k kde 1<k, existuje unárny jazyk L so stavovou zložitosťou sc(L)=n akceptovaný minimálnym n-stavovým deterministickým konečnostavovým automatom s polovicou akceptujúcich stavov takým, že sc(L*)=n+3.”

Veta

“Pre každé n=6k+2 a n=6k+4 kde 0<k, existuje unárny unárny jazyk L so stavovou zložitosťou sc(L)=n akceptovaný minimálnym n-stavovým deterministickým konečnostavovým automatom s polovicou akceptujúcich stavov takým, že sc(L*)=n+5.”

Záver

- Otázky?