UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH

PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA

ÚSTAV MATEMATICKÝCH VIED

PRÍKLADY K PREDMETU MATEMATICKÁ ANALÝZA 2 PRE INFORMATIKOV A FYZIKOV

(ÚMV/MAN3b/10, LETNÝ SEMESTER 2013/2014)

Košice 2014

RNDr. Ivan Mojsej, PhD

Obsah

1 Neurčitý integrál

1. Vypočítajte nasledujúce neurčité integrály:

a) $\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}\,dx$;
b) $\int \left(\sin x + \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}\right)\,dx$;
c) $\int \left(10^{-x} + \frac{x^2+2}{x^2+1}\right)\,dx$;
d) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx$;
e) $\int \frac{x^2}{3(1+x^2)}\,dx$;
f) $\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}\,dx$;
g) $\int \frac{1}{x^2+3x+7}\,dx$;
h) $\int \frac{4^x}{1+4^{2x}}\,dx$;
ch) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$;
i) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$;
j) $\int \operatorname{cotg}^2 x\,dx$;
k) $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$;
l) $\int x\ln^2 x\,dx$;
m) $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx$;
n) $\int \frac{e^x\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}}\,dx$;
o) $\int \frac{1}{\operatorname{tg} x \ln^2 \sin x}\,dx$;
p) $\int \frac{\pi-\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;
q) $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$;
r) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$;
s) $\int \frac{e^{2x}}{4+e^x}\,dx$;
t) $\int \frac{3\,dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$;
u) $\int \arcsin x\,dx$;
v) $\int e^x\cos 2x\,dx$;
w) $\int \frac{x^3+x-1}{x(x^2+1)}\,dx$;
x) $\int |x|\,dx$;
y) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x-1}}$;
z) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$.

2. Vypočítajte nasledujúce neurčité integrály:

a) $\int \frac{\ln x-2}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$;
b) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$;
c) $\int x^2\operatorname{arctg} x\,dx$;
d) $\int x\ln x\,dx$;
e) $\int \frac{11x-2}{3x^2-11x+6}\,dx$;
f) $\int \frac{dx}{(x-1)x^2}$;
g) $\int \frac{x-1}{(x+1)(x+2)^2}\,dx$;
h) $\int \frac{x^4-10x^3+36x^2-46x+25}{x^3-9x^2+27x-27}\,dx$;
ch) $\int \frac{x}{5^x}\,dx$
i) $\int \frac{1}{2x^2+8x+20}\,dx$;
j) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,dx$;
k) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$;
l) $\int \sin(\ln x)\,dx$;
m) $\int \frac{dx}{a^2-x^2},\ a\in\mathbb{R}$;
n) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$;
o) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x-3x^2}}$;

p) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \, dx$;

q) $\int (10^x + 3^x)^3 \, dx$;

r) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x\ln(x^2+1)+1}{1+x^2} \, dx$;

s) $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arccotg} x}}{1+x^2} \, dx$;

t) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} \, dx$;

u) $\int \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2 \, dx$;

v) $\int x^3 e^{x^2} \, dx$;

w) $\int e^x \sin x \, dx$;

x) $\int \frac{\ln\cos x}{\cos^2 x} \, dx$;

y) $\int x^2 \sin 2x \, dx$;

z) $\int (x+2)e^{x^2+4x-5} \, dx$.

3. Vypočítajte nasledujúce neurčité integrály:

a) $\int \frac{\ln x}{x(4+\ln^2 x)} \, dx$;

b) $\int \frac{x}{16+x^4} \, dx$;

c) $\int \frac{2x\ln(x^2+1)}{x^2+1} \, dx$;

d) $\int \frac{dx}{x\ln x \ln\ln x}$;

e) $\int 5xe^{-4x} \, dx$;

f) $\int x^3 \operatorname{arccotg} x \, dx$;

g) $\int (3x^2+1)\ln(x-4) \, dx$;

h) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \, dx$;

ch) $\int \frac{x}{x^2-4x+5} \, dx$;

i) $\int \frac{x+1}{2x^2+4x+10} \, dx$;

j) $\int \frac{x^2+x-2}{(x+3)^2(x-1)(x^2+6x+10)} \, dx$;

k) $\int \frac{x+1}{x^3-1} \, dx$;

l) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} \, dx$;

m) $\int \frac{e^{2x}}{1-3e^{2x}} \, dx$;

n) $\int \frac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3} \, dx$;

o) $\int (|1+x| - |1-x|) \, dx$;

p) $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\sin 2x \, dx$;

q) $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} \, dx$;

r) $\int \frac{\ln\sin x}{\sin^3 x} \, dx$;

s) $\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx$;

t) $\int x\sin(x^2+2) \, dx$;

u) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x} \, dx$;

v) $\int (3x^2+1)\operatorname{arctg} x \, dx$;

w) $\int e^{\cos^2 x}\sin 2x \, dx$;

x) $\int \sin x\sqrt{(3+2\cos x)^5} \, dx$;

y) $\int \frac{dx}{(2x^2+2)\sqrt{\operatorname{arccotg}^3 x}} \, dx$;

z) $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} \, dx$.

4. Vypočítajte nasledujúce neurčité integrály:

a) $\int \frac{dx}{x^2-4x+12}$;

b) $\int \sqrt{x}\ln x \, dx$;

c) $\int \frac{dx}{x^4-2x^3}$;

d) $\int \frac{dx}{x^4-1}$;

e) $\int \frac{2x}{x^2+x+2} \, dx$;

f) $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x} \, dx$;

g) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$; h) $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2}\,dx$;

ch) $\int (x^2+x)\ln(1+x)\,dx$.

5. Vypočítajte nasledujúce neurčité integrály:

a) $\int \frac{x^4+2x^3+x+3}{x^3+1}\,dx$; b) $\int \frac{x}{x^3+9x^2+23x+15}\,dx$;

c) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$; d) $\int \frac{x-1}{(1+x)(x+x^2)}\,dx$;

e) $\int \frac{x^2}{x^2-6x+10}\,dx$; f) $\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$;

g) $\int \frac{dx}{2x^2+9x-5}\,dx$; h) $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}\,dx$;

ch) $\int \frac{4x^3-14x^2+28x-7}{(x-2)^2(x^2-2x+5)}\,dx$; i) $\int \frac{x^3}{x^4-2x^3+3x^2}\,dx$;

j) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{(x+1)^2}}$; k) $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}\,dx$;

l) $\int \frac{x^3+x-1}{x(x^2+1)}\,dx$; m) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{(x+1)^2}}$;

n) $\int \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$; o) $\int \frac{x}{x+\sqrt{x}}\,dx$;

p) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$; q) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{2(x+\sqrt[6]{x^7})}\,dx$;

r) $\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx$; s) $\int \frac{3\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx$;

t) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$; u) $\int \frac{dx}{3^x+1}$;

v) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$; w) $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\,dx$;

x) $\int \frac{9x^4+3x^3-23x^2+x}{9x^3-6x^2-5x+2}\,dx$; y) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}\,dx$;

z) $\int \frac{4x+5\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}\,dx$.

6. Vypočítajte nasledujúce neurčité integrály:

a) $\int \sqrt{\frac{x+2}{2x+3}}\frac{dx}{(x+2)(3x+5)}$; b) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$;

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x}}$; d) $\int \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\,dx$;

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+3}}$; f) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-5x^2}}$;

g) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x^2-4x+1}}\,dx$; h) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x+4}}\,dx$;

ch) $\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$; i) $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx$;

j) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{7-x^2}}$; k) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}$;

l) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-5x^2}}$; m) $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$;

n) $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;

o) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$;

p) $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\, dx$;

q) $\int \sqrt{4-x^2}\, dx$;

r) $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}\, dx$;

s) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}\, dx,\ a \in \mathbb{R}-\{0\}$;

t) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}}$;

u) $\int \frac{3x^2-16}{\sqrt{x^2+6x+11}}\, dx$;

v) $\int \frac{2}{x-\sqrt{x^2-1}}\, dx$;

w) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\, dx$;

x) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{(1-x)(1+x)^2}$;

y) $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$;

z) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

7. Vypočítajte nasledujúce neurčité integrály:

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3+2x+x^2}}$;

b) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}$;

c) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$;

d) $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$;

e) $\int \frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$;

f) $\int \sqrt{3+4x+x^2}\, dx$;

g) $\int \frac{x^3+5x^2+8x+3}{\sqrt{x^2+4x+3}}\, dx$;

h) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\, dx$.

8. Vypočítajte nasledujúce neurčité integrály:

a) $\int \frac{dx}{4\sin x-7\cos x-7}$;

b) $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$;

c) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$;

d) $\int \frac{dx}{2+2\cos^2 x}$;

e) $\int \operatorname{cotg}^3 x\, dx$;

f) $\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg} x}\, dx$;

g) $\int \frac{dx}{\sin x-\cos x}$;

h) $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\, dx$;

ch) $\int \sin^4 x\, dx$;

i) $\int \cos^5 x\, dx$;

j) $\int \cos^2 x \sin x\, dx$;

k) $\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx$;

l) $\int \frac{dx}{\cos x}$;

m) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$;

n) $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$;

o) $\int \frac{dx}{\cos^8 x}$;

p) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$;

q) $\int \sin\sqrt{x}\, dx$;

r) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\, dx$;

s) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1+2\cos x}}\, dx$;

t) $\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x+4\operatorname{cotg} x}$;

u) $\int \frac{dx}{\sin 2x-2\sin x}$;

v) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x}\, dx$;

w) $\int \frac{\cos x}{\sin^7 x}\, dx$;

x) $\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx$;

y) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 6\sin x + 5} \, dx$;

z) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} \, dx$;

ž) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2 - \sin^2 x}} \, dx$.

9. Vypočítajte nasledujúce neurčité integrály:

a) $\int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$;

b) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin x \cos x} \, dx$;

c) $\int \sin^5 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2} \, dx$;

d) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} \, dx$;

e) $\int \cos 3x \cos 4x \, dx$;

f) $\int \sin \frac{x}{4} \cos \frac{3x}{4} \, dx$;

g) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$;

h) $\int \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x} \, dx$;

ch) $\int \frac{e^x - 2}{e^{2x} + 4} \, dx$;

i) $\int \frac{dx}{1 + e^{x/2} + e^{x/3} + e^{x/6}}$;

j) $\int \arcsin^2 x \, dx$;

k) $\int x \arcsin x \, dx$.

l) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} \, dx$;

m) $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$;

n) $\int \operatorname{cotg} x \ln^2 \sin x \, dx$;

o) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \, dx$;

p) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$;

q) $\int \sin 7x \sin 8x \, dx$;

r) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$;

s) $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x} \, dx$;

t) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx$;

u) $\int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{4} \, dx$;

v) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 8\sin x + 26} \, dx$;

w) $\int \frac{e^{2x} - e^x}{e^{2x} + 1} \, dx$;

x) $\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} \, dx$;

y) $\int \frac{dx}{4 - 3\sin^2 x}$;

z) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} \, dx$.

10. Vypočítajte nasledujúce neurčité integrály:

a) $\int \frac{dx}{1 - 3\sin x \cos x - 2\cos^2 x}$;

b) $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$;

c) $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$;

d) $\int \cos^5 2x \sin 2x \, dx$;

e) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$;

f) $\int \frac{\operatorname{cotg} x}{\sin x + \cos x - 1} \, dx$.

2 Určitý integrál

1. Vypočítajte nasledujúce určité integrály:

a) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx;$

b) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx;$

c) $\int\limits_{-1}^{4} f(x)\,dx, \quad \text{ak } f(x) = \begin{cases} x^2+4, & -1 \le x \le 0 \\ 4, & 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{x+2} + \frac{11}{3}, & 1 < x \le 4 \end{cases};$

d) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x+x^2};$

e) $\int\limits_{1}^{27} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x^2}}\,dx;$

f) $\int\limits_{0}^{3} f(x)\,dx, \quad \text{ak } f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 1 \le x \le 2 \\ (2-x)^2, & 2 \le x \le 3 \end{cases};$

g) $\int\limits_{-3}^{1} |x|\,dx;$

h) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\,dx;$

ch) $\int\limits_{3}^{8} \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx;$

i) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx;$

j) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx;$

k) $\int\limits_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x}\,dx;$

l) $\int\limits_{0}^{1} \ln(x+1)\,dx;$

m) $\int\limits_{2}^{3} x^2 e^x\,dx;$

n) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx;$

o) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^5}{1+x^2}\,dx;$

p) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+1)(x-2)}\,dx;$

q) $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^3 x\,dx;$

r) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,dx;$

s) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}};$

t) $\int\limits_{0}^{\pi} |\cos x|\,dx;$

u) $\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2};$

v) $\int\limits_{0}^{1} x\sqrt{1-x}\,dx;$

w) $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx;$

x) $\int\limits_{1}^{3} \frac{\cos \ln x}{x}\,dx;$

y) $\int\limits_{1}^{2} \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx;$

z) $\int\limits_3^7 \frac{x}{x^2-4} dx$;

aa) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$;

bb) $\int\limits_0^\pi x^3 \sin x \, dx$;

cc) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx$;

dd) $\int\limits_0^1 x e^{-x} \, dx$;

ee) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\sin x}$;

ff) $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+2} \, dx$;

gg) $\int\limits_1^4 \frac{2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \, dx$;

hh) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} \, dx$;

ii) $\int\limits_0^1 \ln(x^2+1) \, dx$.

2. Vypočítajte obsah rovinnej oblasti, ktorá je ohraničená uvedenými krivkami:

a) $y = x^3 + x^2 - 6x$, $x = -2$, $x = 3$ a osou o_x;

b) parabolou $y = 3 - 2x - x^2$, jej dotyčnicou v bode $[2, -5]$ a osou o_y;

c) parabolou $y = x^2 - 2x + 2$, jej dotyčnicou v bode $[3, 5]$ a osami o_x, o_y;

d) $x - y + 1 = 0$, $3x + 2y - 12 = 0$ a $y = 0$;

e) $y = x + 1$, $y = \cos x$ a osou o_x;

f) $y = x^2 - 4x + 6$ a $y = -3 + 8x - 2x^2$;

g) $y = \ln x$, $y = 0$ a $x = e$;

h) $y = x^3$ a $y = x$;

ch) $y^2 = x$, $x \cdot y = 8$, $x = 8$ a osou o_x;

i) $y = x^2 - 2x$ a $y = x$;

j) $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ a $y = xe^{-2x}$;

k) $y = 2^x$, $y = 2$ a $x = 0$;

l) $y = e^{-x} \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ a $x = \pi$;

m) $x \cdot y = 4$, $x + y = 5$;

n) $y = x^2$ a $y = x^3$;

o) $y = x^2 + 1$ a $x + y = 3$;

p) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{4}$ a $x = \frac{5\pi}{4}$.

3. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinného útvaru ohraničeného danými krivkami okolo osi o_x:

a) $x \cdot y = 4$, $x = 1$, $x = 4$ a osou o_x;

b) $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$ a osou o_x;

c) $y^2 = 4x$, $x = 3$ a osou o_x;

d) $y = e^{-x}$, $x = 2$ a osami o_x, o_y;

e) $y = 1 - x^2$, $y = x^2$;

f) $y = x^2 + 2$, $x = -2$ a $x = 2$;

g) $y = e^x\sqrt{x}$, $x = 1$ a $y = 0$;

h) $y = x^2$ a $y = 4$;

ch) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{5\pi}{4}$ a osou o_y.

4. Vypočítajte dĺžku danej krivky na uvedenom intervale:

a) $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, $\quad x \in \langle 1, 2 \rangle$;

b) $y = x^{\frac{3}{2}}$, $\quad x \in \langle 0, 4 \rangle$;

c) $y = 1 - \ln\cos x$, $\quad x \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$;

d) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\quad x \in \langle 0, 3 \rangle$;

e) $y = \ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$, $\quad x \in \langle \ln 2, \ln 5 \rangle$;

f) $y = \frac{2+x^6}{8x^2}$, $\quad x \in \langle 1, 2 \rangle$;

g) $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$, $x \in \langle 0, 3 \rangle$;

h) $y = \ln(\sin x)$, $x \in \langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

5. Vypočítajte obsah rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou rovinného útvaru ohraničeného danými krivkami okolo osi o_x:

a) $y^2 = 4x$, $x = 3$ a osou o_x;

b) $y = \frac{x^2}{2}$, $x = 0$, $x = \frac{3}{4}$ a osou o_x;

c) $y = x^3$, $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{2}{3}$ a osou o_x;

d) $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 2$ a osou o_x.

6. Vypočítajte nasledujúce nevlastné integrály:

a) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

b) $\int\limits_{-\infty}^0 e^x\,dx$;

c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

d) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{2\sqrt{|x|}}$;

e) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$;

f) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln x}$

g) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$;

h) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$;

ch) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{(x-2)^2}$;

i) $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

j) $\int\limits_0^1 x\ln x\,dx$;

k) $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$;

l) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\, dx;$

m) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx;$

n) $\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}\, dx;$

o) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\, dx;$

p) $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x};$

q) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2(1-x)}\, dx;$

r) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx;$

s) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^3};$

t) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}};$

u) $\int\limits_{0}^{\infty} x \sin x\, dx;$

v) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3};$

w) $\int\limits_{0}^{2} \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\, dx;$

x) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}};$

y) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x};$

z) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx.$

3 Diferenciálne rovnice

1. Zistite, či funkcia $\varphi(x)$ je riešením danej diferenciálnej rovnice prvého rádu na uvedenom intervale I:

a) $\varphi(x) = 5e^{-2x},\ I = \mathbb{R} \quad \ldots \quad y' + 2y = 0;$

b) $\varphi(x) = x + e^{x},\ I = \mathbb{R} \quad \ldots \quad (x - y + 1)y' = 1;$

c) $\varphi(x) = x\sqrt{1 - x^2},\ I = (-1, 1) \quad \ldots \quad yy' = x - 2x^3;$

d) $\varphi(x) = x^3 - x^2,\ I = (0, \infty) \quad \ldots \quad y' - \dfrac{3y}{x} = x;$

e) $\varphi(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}},\ I = \mathbb{R} \quad \ldots \quad y' = y(1 - y).$

2. Riešte nasledujúce diferenciálne rovnice prvého rádu (nájdite všetky ich riešenia):

Diferenciálne rovnice so separovanými premennými

a) $x + 2x^3 + (y + 2y^2)y' = 0;$

b) $\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + \dfrac{y}{\sqrt{1 + y^2}}y' = 0;$

c) $y' = x^2 e^x;$

d) $y' = \dfrac{2x}{1 + x^2};$

Separovateľné diferenciálne rovnice

e) $(1 + e^x)yy' = e^x;$

f) $y' = x - 2xy;$

g) $x + yy' = 0;$

h) $10^{x+y} = y';$

Homogénne diferenciálne rovnice

i) $2xyy' = y^2 - x^2;$

j) $y' = \dfrac{x - y}{x + y};$

k) $(x - y)y' = x + y;$

l) $xy' = y(1 + \ln y - \ln x);$

Lineárne diferenciálne rovnice

m) $xy' + y = \ln x + 1;$

n) $xy - x^2y' = 2a^2,\ a \in \mathbb{R};$

o) $xy' - y = x^2 \cos x;$

p) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2;$

Bernoulliho diferenciálne rovnice

q) $y' + \dfrac{xy}{1 - x^2} = x\sqrt{y};$

r) $2xyy' + x = -y^2;$

s) $xy' + y - xy^2 \ln x = 0;$

t) $y' + y - x\sqrt{y} = 0.$

3. Riešte nasledujúce diferenciálne rovnice prvého rádu (nájdite všetky ich riešenia):

a) $2yy' - 4x^3 = 0;$

b) $1 - 2x - y^2 y' = 0;$

c) $x - y + xy' = 0;$

d) $(y^2 - 3x^2)y' + 2xy = 0;$

e) $(2x - 3)y' = -3x^2 - 2y;$

f) $y'(x+1) + y = \dfrac{x^2+1}{x+1};$

g) $xy' = x\sqrt{y - x^2} + 2y;$

h) $(5xy' - y)y^4 = \dfrac{x}{x-1};$

ch) $e^{x+y} = y';$

i) $y'x = y - y^2;$

j) $y' = \sqrt[3]{2x - y} + 2;$

k) $y' = \sqrt{4x + 2y + 1};$

l) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{y^2}{x^2};$

m) $y' = \dfrac{2x+y}{x};$

n) $y' - y = e^x;$

o) $x(x+1)y' + y = x(x+1)^2 e^{-x^2};$

p) $x + (y+1)y' = 0;$

q) $y' = x\cos x;$

r) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x};$

s) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x};$

t) $6x^4 + y - xy' = 0;$

u) $xy' + y = x\sin x;$

v) $e^x \sin^3 y + y'(1 + e^{2x})\cos y = 0;$

w) $y' = \dfrac{y-1}{x+1};$

x) $x \sin\dfrac{y}{x} y' + x = y\sin\dfrac{y}{x};$

y) $y' + y = \cos x;$

z) $y + xy + (x - xy)y' = 0;$

ž) $y'\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 0;$

ô) $(x-2)y' = \dfrac{3y}{x+1};$

ä) $y - 2x + 1 + (y - 2x)y' = 0.$

4. Nájdite riešenie danej diferenciálnej rovnice prvého rádu, ktoré vyhovuje uvedenej začiatočnej podmienke (riešte Cauchyho úlohu):

a) $(x+1)y' + xy = 0, \quad y(0) = 1;$

b) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{xy'}{\sqrt{1-y^2}} = 0, \quad y(0) = \frac{\sqrt{3}}{2};$

c) $y' \operatorname{cotg} x + y = 2, \quad y(0) = -2;$

d) $y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \quad y(2) = 0;$

e) $y'\cos^2 x = y\ln y, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = e;$

f) $y' = xy^2, \quad y(0) = 4;$

g) $\dfrac{1+y^2}{1+x^2} - y' = 0, \quad y(0) = 1;$

h) $\dfrac{x}{1+y} - \dfrac{yy'}{1+x} = 0, \quad y(0) = 1;$

i) $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x, \quad y(0) = 0;$

j) $y'\ln x + \dfrac{y}{x} = 1, \quad y(e) = e.$

5. Riešte nasledujúce diferenciálne rovnice prvého rádu (nájdite všetky ich riešenia):

a) $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x};$

b) $y^2 - xy - x^2y' = 0;$

c) $y' - y + \operatorname{tg} x = y^4 \cos x$;

d) $xy^2(xy' + y) = 1$;

e) $y' - \dfrac{1}{x}y = x^2$;

f) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;

g) $xy + e^x - xy' = 0$;

h) $(xy' - 1)\ln x = 2y$;

i) $(1 + e^x)yy' = e^x$;

j) $y' = x - 2xy$;

k) $y' = \dfrac{1}{x - y} + 1$;

l) $2y - x^3y' = 0$;

m) $y' - \dfrac{4}{x}y = x\sqrt{y}$;

n) $y' + \dfrac{2y}{x} = -x^4e^xy^3$;

o) $y' = \dfrac{1}{x - y} + 1$;

p) $2y - x^3y' = 0$;

q) $(x + y + 1) + (2x + 2y - 1)y' = 0$;

r) $y' = \ln x + 1$.

6. Nájdite riešenie danej diferenciálnej rovnice prvého rádu, ktoré vyhovuje uvedenej začiatočnej podmienke (riešte Cauchyho úlohu):

a) $(x + y)^2y' = 1, \quad y(0) = 1$;

b) $xy = (1 + x)(2 + y)y', \quad y(e - 1) = 1$;

c) $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, \quad y(\sqrt{e}) = \sqrt{e}$;

d) $xy' - 3y = 3 - 4x - x^2, \quad y(1) = 3$;

e) $y' + y\cos x - \sin x \cos x = 0, \quad y(0) = 1$;

f) $xy' + y - y^2 = 0, \quad y(1) = \frac{1}{2}$;

g) $(x + 1)(y' + y^2) = -y, \quad y(0) = 1$.

7. Nájdite všeobecné riešenie nasledujúcich lineárnych homogénnych diferenciálnych rovníc:

a) $y'' + 4y' = 0$;

b) $y'' - 4y' + 3y = 0$;

c) $y'' - 4y' + 5y = 0$;

d) $y'' - 2y' + 5y = 0$;

e) $y'' - 2y' + 10y = 0$;

f) $y'' + 5y' + 6y = 0$;

g) $y'' - 3y' + 2y = 0$;

h) $y'' - 7y' + 12y = 0$;

ch) $y'' - 8y' + 16y = 0$;

i) $y'' + 6y' + 9y = 0$;

j) $9y'' + 6y' + y = 0$;

k) $y'' - 4y' + 13y = 0$;

l) $4y'' - 8y' + 5y = 0$;

m) $y'' - 8y' + 25y = 0$;

n) $4y'' + 8y' + 5y = 0$;

o) $y'' - 2y' + y = 0$;

p) $y'' + 4y' + 3y = 0$;

q) $y'' + 2y' + y = 0$.

8. Nájdite všeobecné riešenie nasledujúcich lineárnych nehomogénnych diferenciálnych rovníc na príslušnom intervale I (ak nie je uvedený žiaden interval I, uvažujte $I = \mathbb{R}$):

a) $y'' - y' - 6y = 10\left(\mathrm{e}^{-2x} + x\mathrm{e}^{3x}\right)$;

b) $y'' + 2y' + y = e^{-x} + e^{x}$;

c) $y'' + y = 5 - 3\cos 2x$;

d) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x} + \sin x \quad$ na $I = (0, \pi)$;

e) $9y'' - 6y' + y = \sin\dfrac{x}{3}$;

f) $y'' - 7y' + 10y = -12e^{3x}$;

g) $y'' - y' = \mathrm{e}^{2x}\cos\mathrm{e}^{x}$;

h) $y'' - y = \cos^2 x$;

ch) $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^3 x} \quad$ na $I = (\pi, 2\pi)$;

i) $y'' - y' = e^{x}$;

j) $y'' - 2y' + y = \dfrac{2\mathrm{e}^{x}}{x^2 + 1}$;

k) $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x} \quad$ na $I = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

l) $y'' - 2y' = 3x + 2xe^{x}$;

m) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{1 - x^2} \quad$ na $I = (-1, 1)$;

n) $y'' - y' - 12y = 7x\mathrm{e}^{-3x}$;

o) $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{x}\ln x \quad$ na $I = (0, \infty)$;

p) $y'' - 4y' = 4$;

q) $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x}\ln x \quad$ na $I = (0, \infty)$;

r) $y'' - 7y' + 12y = e^{-4x}$;

s) $y'' - 7y' + 10y = (x + 1)e^{-5x}$;

t) $3y'' - 4y' = x^2 e^{\frac{4}{3}x}$;

u) $y'' - 2y' + 2y = 4e^{x}\sin x$;

v) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x} \quad$ na $I = (0, \infty)$;

w) $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$.

9. Nájdite riešenie nasledujúcich lineárnych diferenciálnych rovníc, ktoré vyhovuje daným začiatočným podmienkam (riešte Cauchyho úlohu):

a) $y'' - y' = -5\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x), \quad y(0) = -4,\ y'(0) = 5$;

b) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{x}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;

c) $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$;

d) $y'' + 16y = 1, \quad y(0) = \frac{1}{8},\ y'(0) = \frac{1}{4}$;

e) $y'' - 4y = x + 2, \quad y(0) = \frac{7}{2},\ y'(0) = -\frac{17}{4}$;

f) $y'' - y' = \dfrac{1}{1 + e^{x}}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$;

g) $y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 15$;

h) $y' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$.

4 Diferenciálny počet funkcie viac premenných

1. Nájdite funkciu $f(x,y)$ a $\varphi(x)$, ak $f(x,y) = x - y + \varphi(x+y)$ a $f(x,0) = x^3$.

2. Nájdite funkciu $f(x,y)$, ak $f(x-y, \frac{x}{y}) = x^3 - y^3$.

3. Nájdite funkciu $f(x)$, ak $f(\frac{x}{y}) = \frac{2xy(\ln x - \ln y)}{x^2+y^2}$, $x > 0$, $y > 0$.

4. Rozhodnite, či nasledujúce množiny sú otvorené alebo uzavreté a nájdite ich všetky hromadné body (deriváciu množiny), vnútorné body (vnútro množiny), hraničné body (hranicu množiny) a izolované body (svoje odpovede zdôvodnite !), ak:

a) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : x = (-1)^n \dfrac{n}{n+1},\ y = 3,\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

b) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : x = (-1)^n \dfrac{2n-2}{5n+3},\ y = m,\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}\right\}$;

c) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : x = k,\ y = k^2 \vee x = k,\ y = k^2 - \dfrac{1}{n},\ k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

d) $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : x = \mathbb{Q},\ y = \mathbb{Q}\right\} = \mathbb{Q}^2$;

e) $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : -1 < x \leq 1,\ y + 2x = 4\right\}$;

f) $G = \left\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : y - 5x = k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$;

g) $H = \left\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : \max\{x,y\} = 2,\ x \neq y\right\}$;

h) $CH = \left\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : x < \dfrac{1}{y}\right\}$;

ch) $I = \left\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : x < y^3\right\}$;

i) $J = \left\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : 2 < x \leq 3,\ -5 \leq y \leq 6\right\} = (2,3\rangle \times \langle -5,6\rangle$;

j) $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : x = \dfrac{1}{n},\ -5 \leq y \leq 6,\ n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} \times \langle -5,6\rangle$;

k) $L = \left\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : y < \sin x,\ y > 0\right\}$;

l) $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : 2x \leq y \leq -x + 3,\ 1 < x \leq 2\right\}$;

m) $N = \left\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : x^2 + y^2 < 3,\ x \notin \mathbb{Z},\ y \notin \mathbb{Z}\right\}$;

n) $O = \left\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : 1 \leq |x| \leq 2,\ 1 \leq |y| \leq 2\right\}$;

o) $P = \left\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : 1 \leq |x| + |y| \leq 2\right\}$;

p) $Q = \left\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : 1 \leq |x| \leq 2,\ 1 \leq |y| \leq 2,\ x^2 + y^2 \leq 2\right\}$;

q) $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : 1 < |x| + |y| < 2,\ y \neq 1\right\}$;

r) $S = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : 2 < x < 5,\ 0 < y < 2\} = (2,5\rangle \times (0,2)$;

s) $T = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : 2 < x < 5,\ 0 \leq y < 2\} = (2,5\rangle \times \langle 0,2)$;

t) $U = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : x = \mathbb{Q},\ y = \mathbb{R}\} = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$;

u) $V = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : x = \mathbb{Q},\ y = \mathbb{Z}\} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$.

5. Nájdite definičný obor nasledujúcich funkcií (a načrtnite ho, ak ide o funkciu dvoch premenných), ak:

a) $f(x,y) = \dfrac{x \ln y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$; b) $f(x,y) = \sqrt{2 - |x| - |y|} + \sqrt[4]{|x| + |y| - 1}$;

c) $f(x,y) = xy - \sqrt{x^4 - 16y^4}$; d) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x}{x+y} + \sqrt{2y - x^2 - y^2}$;

e) $f(x,y) = \dfrac{3-y}{\sqrt{x + |y|}} + \dfrac{5}{\sqrt{x - |y|}}$; f) $f(x,y) = \ln(9 - x^2 - y^2) + \dfrac{\arcsin \frac{y}{x}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$;

g) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$; h) $f(x,y) = \ln(3x + y - 3) + \dfrac{\ln(3-x)}{\sqrt{3x - 2y + 6}}$;

ch) $f(x,y) = \sqrt{(x-2)(y+3)}$; i) $f(x,y,z) = \ln(xyz) + \ln(yz)$;

j) $f(x,y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$; k) $f(x,y) = \arccos(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{|x| + |y| - \sqrt{2}}$;

l) $f(x,y) = \dfrac{1}{25 - x^2 - y^2}$; m) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{2x + |y|}$;

n) $f(x,y) = \dfrac{\pi y^2}{6} \sqrt{x^2 - y^2}$; o) $f(x,y) = \sqrt{\left[x^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4} - 1\right](x^2 + y^2 - 6x)}$;

p) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}$; q) $f(x,y) = \arcsin \dfrac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$;

r) $f(x,y) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}\right)}$; s) $f(x,y,z) = \sqrt{1-x} + \sqrt{y+3} + \sqrt{z}$;

t) $f(x,y) = \ln(x+y)$; u) $f(x,y,z) = \ln(xyz)$;

v) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$; w) $f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$;

x) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+4} + \dfrac{1}{y-2}$; y) $f(x,y,z) = \arcsin \dfrac{x}{y} + \arcsin y + \arccos \dfrac{z}{3}$.

6. Nájdite definičný obor nasledujúcich funkcií (a načrtnite ho). Rozhodnite, či definičný obor je otvorená alebo uzavretá množina a nájdite jeho všetky hromadné body (deriváciu množiny), vnútorné body (vnútro množiny), hraničné body (hranicu množiny) a izolované body (svoje odpovede zdôvodnite !), ak:

a) $f(x,y)=\ln(|x|+y)+\dfrac{1}{\sqrt{y-x}}$;

b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln(2-x^2-y^2)$;

c) $f(x,y)=\dfrac{\arccos(y-1)}{\sqrt[3]{x^2}}$;

d) $f(x,y)=y^2\sqrt{x^2-y^2}+\ln(xy)$;

e) $f(x,y)=\sqrt{y\sin x}$;

f) $f(x,y)=\dfrac{\ln(4+4x-y^2)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

g) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2-y^2}$;

h) $f(x,y)=\arcsin(1-x^2-y^2)+\arcsin(2xy)$;

ch) $f(x,y)=\sqrt{3x}-\dfrac{2}{\sqrt{y}}$;

i) $f(x,y)=\arcsin\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{|y|-|x|}$;

j) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$;

k) $f(x,y)=\ln(2x+y-3)+\dfrac{\ln(4-x)}{\sqrt{2x-2y+6}}$.

7. Nájdite definičný obor nasledujúcich funkcií a načrtnite rezy grafov týchto funkcií rovinami $x=0$ a $y=0$, ak:

a) $f(x,y)=\sin(x+y)$;

b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$;

c) $f(x,y)=1+xy$;

d) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$;

e) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}$;

f) $f(x,y)=4-2x-3y$.

8. Z daných funkcií vytvorte zloženú funkciu a určte jej definičný obor, ak:

a) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+3x_3$, kde $x_1=\sin^2 t$, $x_2=\cos^2 t$, $x_3=\sin^2(t+1)$;

b) $g(x_1,x_2)=2x_1\sin x_2$, kde $x_1=u-\cos v$, $x_2=uv$;

c) $g(x_1,x_2)=x_1^2+2x_1x_2$, kde $x_1=s+t$, $x_2=s-t$;

d) $g(u,v)=\sin u+\sqrt{v}$, kde $u=xy$, $v=x^2-y^2$;

e) $g(u,v)=\sqrt{uv}$, kde $u=x-y$, $v=x+y$;

f) $g(u,v)=u^v$, kde $u=x^2+y^2$, $v=2x-3y$.

9. Rozložte na zložky uvedenú zloženú funkciu a určte jej definičný obor, ak:

a) $F(x,y)=\ln\dfrac{xy}{x^2-y^2}$;

b) $F(x,y)=\sin(x+y)-xy+e^{x+y}$;

c) $F(x,y)=(x-y)^2+\sqrt{x+y}$;

d) $F(x,y)=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x-y}{y}}$;

e) $F(x,y)=\dfrac{x}{y}e^{xy}$;

f) $F(x,y,z)=\sin\dfrac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

10. Pomocou definície dokážte, že postupnosť bodov $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $X_k=\left(\frac{k}{k+1},\frac{2k-1}{3k},\frac{1}{k}\right)$,

konverguje k bodu $A = (1, \frac{2}{3}, 0)$.

11. Zistite, či daná postupnosť bodov $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentná a nájdite jej limitu (ak je to možné), ak:

a) $X_k = \left(1 - \frac{1}{2^k}, \frac{2}{k^4}, \frac{(-1)^k}{5^k}\right)$;

b) $X_k = \left(\frac{k+(-1)^k}{k-(-1)^k}, \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+\sqrt{k+\sqrt{k}}}}, \sqrt[k]{k^{12}}\right)$;

c) $X_k = \left(\frac{k-1}{k^2}, \sqrt[k]{k}, 1\right)$;

d) $X_k = \left(\left(\frac{2k+1}{k-5}\right)^{6k+5}, \frac{k^2+1}{k^4\sqrt[k]{5}}, \frac{(-1)^k}{k+1}\right)$;

e) $X_k = \left(\sqrt[k]{\frac{5k+1}{k+5}}, \sqrt{k} - k, 4\right)$;

f) $X_k = \left(\sqrt[k]{k^3 + 2k}, \sqrt{k(k+1)} - k, \frac{\sqrt[k]{2}}{k}\right)$.

12. Nájdite postupnosť bodov priestoru $\mathbb{E}^3$, ktorá konverguje k danému bodu A, ak:

a) $A = (1, 1, 1)$;

b) $A = (-1, \frac{1}{e}, \frac{3}{4})$;

c) $A = (e^{-\frac{7}{3}}, \sqrt{2}, 1)$;

d) $A = (0, 1, 0)$.

13. Vypočítajte nasledujúce limity funkcií:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^2y^2}{3x^2y^2+(x-y)^2}$;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$;

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}$;

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{x+y}$;

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4}{x^4+y^2}$;

f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{x+yz-xy+1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1-1}}$

g) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ y\to -1}} \frac{(x+y)^2-4}{x+y+2}$;

h) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^4+y^2}$;

ch) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to \infty}} \left(1 - \frac{x}{y}\right)^y$;

i) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to 1}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$;

j) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$;

k) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{2x}{(x-1)^2+(y-1)^2}$;

l) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2-\sqrt{4-xy}}{xy}$;

m) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{arctg} x^2y}{x^2+y^2}$;

n) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{x^2+4xy-12y^2}{x^3-8y^3}$;

o) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$;

p) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

q) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$

r) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$;

s) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to -3}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$

t) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \frac{x}{x+y+z}$;

u) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$;

v) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}\right)$.

14. Z Heineho definície limity funkcie dokážte, že:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{x+2y}{x^2+y^2} = 2$;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0\\ z\to 1}} \frac{x+y-z+1}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2}$.

15. Nájdite všetky body nespojitosti daných funkcií, ak:

a) $f(x,y) = \frac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y}$;

b) $f(x,y) = \sin\frac{1}{|x|-|y|}$;

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$;

d) $f(x,y) = \ln|x-y|$;

e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$;

f) $f(x,y,z) = \ln\frac{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

16. Vyšetrite spojitosť daných funkcií v bode X_0, ak:

a) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy+xz}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 1, & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}, \quad X_0=(0,0,0)$;

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}, \quad X_0=(0,0)$;

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{(y-1)^2}, & y\neq 1 \\ 0, & y=1 \end{cases}, \quad X_0=(0,1)$;

d) $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & (x,y)=(0,0) \end{cases}, \quad X_0=(0,0)$;

e) $f(x,y) = \begin{cases} (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 4, & (x,y)=(0,0) \end{cases}, \quad X_0=(0,0)$.

17. Dodefinujte funkciu $f(x,y) = \frac{\sin xy}{y}$ tak, aby bola spojitá na celom $\mathbb{E}^2$ (ak je to možné).

18. Pre aké $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ je funkcia $f(x,y)$ spojitá v bode $A=(a,2a)$, ak

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2+4xy-12x^2}{y^3-8x^3}, & 2x\neq y \\ 5, & 2x=y \end{cases}.$$

19. Pre aké $a \in \mathbb{R}$ je funkcia $f(x,y)$ spojitá v bode $A=(0,1)$, ak

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{xy-y+1}-1}{x^2+y^2-2y+1}, & (x,y)\neq(0,1)\\ a, & (x,y)=(0,1)\end{cases}.$$

20. Vypočítajte parciálne derivácie prvého rádu nasledujúcich funkcií v bode A, ak:

a) $f(x,y)=e^x\sin y,\ A=(1,2);$ b) $f(x,y)=\frac{\pi x^2y}{3},\ A=(4,6);$

c) $f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x},\ A=(1,1);$ d) $f(x,y)=\frac{x\cos y-y\cos x}{1+sinx+\sin y},\ A=(0,0).$

21. Vypočítajte parciálne derivácie prvého rádu nasledujúcich funkcií, ak:

a) $f(x,y,z)=\frac{xy}{x+y}+\frac{yz}{y+z};$ b) $f(x,y)=\ln\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}};$

c) $f(x,y)=(x+y)^y;$ d) $f(x,y,z)=\operatorname{arctg}(x-y)^z;$

e) $f(x,y)=\frac{\operatorname{cotg}(x^2y)}{x+y};$ f) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy};$

g) $f(x,y)=xy\cdot e^{x+2y};$ h) $f(x,y,z)=2\cos(xy-z)+(2x-z)^2y^3;$

i) $f(x,y)=z\cdot x^{\frac{1}{y}};$ j) $f(x,y,z)=\sqrt{xy}\,(2x+3z)^{\sqrt{yz}};$

k) $f(x,y)=\ln(x-\sqrt{x^2+y^2});$ l) $f(x,y)=x^{x^y}.$

22. Dokážte, že pre funkciu $z=\sqrt{x}\sin\frac{y}{x},\ x>0$ platí $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{2}.$

23. Dokážte, že pre funkciu $z=y^2\sin(x^2-y^2)$ platí $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$

24. Dokážte, že pre funkciu $z=x\cdot e^{\frac{y}{x}}-x^2-y^2$ platí $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-x^2-y^2.$

25. Dokážte, že daná funkcia $f(x,y)$ je diferencovateľná v každom bode priestoru $\mathbb{E}^2$ a nájdite jej diferenciál v bode A, ak

a) $f(x,y)=x^2-3xy+y^2,\ A=(1,0);$ b) $f(x,y)=\sin x\cos y,\ A=(\pi,3).$

26. Zistite, či funkcia $f(x,y)$ je diferencovateľná v bodoch A,B,C, ak

$$A=(0,1),\ B=(0,0),\ C=(2,3)\ \text{ a } f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+4y^2}+1, & (x,y)\neq(0,1)\\ -3, & (x,y)=(0,1)\end{cases}.$$

27. Zistite, či daná funkcia $f(x,y)$, resp. $f(x,y,z)$ je diferencovateľná v bode A a nájdite jej diferenciál v tomto bode, ak

a) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y},\ A=(2,1);$ b) $f(x,y,z)=2^x\sin y\operatorname{arctg}z,\ A=(-4,\frac{\pi}{2},0);$

c) $f(x,y)=x\cdot e^{-yx},\ A=(1,-2);$ d) $f(x,y,z)=(xy-yz+xz)^2,\ A=(1,1,1);$

e) $f(x,y)=\frac{1}{(x^2+y^2)^2},\ A=(-1,2).$

28. Pomocou diferenciálu nájdite približnú hodnotu čísel:

a) $\sqrt{3,03^2 + 9,01^2}$;   b) $1,05^{2,01}$;

c) $1,04^3 + 1,05^3$;   d) $\frac{\sin 1,51 \cdot \operatorname{arctg} 0,08}{2^{3,95}}$.

29. Zistite, či funkcia $f(x,y)$ je spojitá a diferencovateľná na celom priestore $\mathbb{E}^2$, ak

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

30. Vyšetrite spojitosť, diferencovateľnosť daných funkcií v bode $(0,0)$ a nájdite jej prvé parciálne derivácie v tomto bode, ak

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$;   b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

31. Vyšetrite spojitosť a nájdite prvé parciálne derivácie funkcie $f(x,y)$ v bode $(0,0)$, ak

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

32. Dokážte, že funkcia $f(x,y)$ je spojitá na celom priestore $\mathbb{E}^2$ a je diferencovateľná v každom bode $(x,y) \neq (0,0)$, ak

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

33. Nájdite rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie $f(x,y)$ v bode T, ak

a) $f(x,y) = -2x^4 + y^6$, $T = (2,1,?)$;   b) $f(x,y) = \frac{x}{y}$, $T = (2,?,-1)$;

c) $f(x,y) = x^y$, $T = (1,1,?)$;   d) $f(x,y) = \ln(1+x+y)$, $T = (?,0,0)$;

e) $f(x,y) = x \ln y$, $T = (1,1,0)$;   f) $f(x,y) = x \sin y$, $T = (0,0,?)$;

g) $f(x,y) = \sqrt{14 - x^2 - y^2}$, $T = (3,1,?)$;   h) $f(x,y) = (y - x - 2)^2$, $T = (1,1,?)$;

i) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $T = (3,4,?)$;   j) $f(x,y) = \sin \frac{x}{y}$, $T = (\pi,1,?)$.

34. Nájdite rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, pričom dotyková rovina je rovnobežná s rovinou $\sigma : 2x + 2y - z = 0$.

35. Nájdite rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, pričom dotyková rovina je kolmá na priamku $p : x = 1 - t,\ y = 2t,\ z = -2 - 2t,\ t \in \mathbb{R}$.

36. Vypočítajte parciálne derivácie prvého rádu nasledujúcich zložených funkcií:

a) $z = \arcsin \frac{u}{v}$, kde $u = 2x + y$, $v = 2x - y$;

b) $z = \operatorname{arctg} \frac{u}{x}$, kde $u = 10^x$;

c) $z = u^2 v - uv^2$, kde $u = x \cos y$, $v = x \sin y$;

d) $z = u \cdot e^{\frac{u}{v}}$, kde $u = x^2 + y^2$, $v = xy$;

e) $z = x\sqrt{y}$, kde $x = \ln t$, $y = 1 + e^t$;

f) $z = x^{\ln y}$, kde $x = t^3$, $y = t^2$;

g) $z = (u - v) \cdot e^{\frac{3w}{10}}$, kde $u = 3 \sin x$, $v = \cos x$, $w = x$;

h) $z = \frac{u}{v} \operatorname{arctg}(u + v)$, kde $u = xy$, $v = x + y$;

i) $z = \ln(u^2 + v^2)$, kde $u = y \cos x$, $v = x \sin y$;

j) $z = f(u, v)$, kde $u = x + y$, $v = x - y$ a funkcia f je diferencovateľná na $\mathbb{E}^2$;

k) $u = r + v^2$, kde $r = x^2 + \sin y + 3z$, $v = \ln(x + y + z)$;

l) $u = \ln(r^2 + v + s^2)$, kde $r = 2^{x+y^2+z}$, $v = x^2 yz$, $s = \sin(x + y + z)$;

m) $u = f(r, s, t)$, kde $r = x + 2y - z$, $s = 3x - y - 2z$, $t = \sin x \sin y \sin z$ a funkcia f je diferencovateľná na celom priestore $\mathbb{E}^3$;

n) $z = (2x^2 + y^2)^{2x+3y}$;

o) $z = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \ln(3x - 2y)$;

p) $z = f(x^2 + y^2, x \cdot e^{-\frac{y}{x}})$, kde funkcia f je diferencovateľná na celom priestore $\mathbb{E}^2$.

37. Dokážte, že funkcia $z = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}$, kde $u = x+y$, $v = x-y$, vyhovuje rovnici $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x-y}{x^2+y^2}$.

38. Dokážte, že funkcia $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + f(u)$, kde $u = x - y$ a funkcia f je diferencovateľná na celom priestore $\mathbb{E}^1$, vyhovuje rovnici $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$.

39. Dokážte, že funkcia $z = x \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$, kde funkcia f je diferencovateľná na celom priestore $\mathbb{E}^1$, vyhovuje rovnici $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$.

40. Dokážte, že funkcia $u = x^3 \sin \frac{z^2+y^2}{x^2}$, vyhovuje rovnici $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 3u$.

41. Dokážte, že funkcia $u = xy \cdot \varphi(x^2 - y^2 - z^2)$, kde funkcia φ je diferencovateľná na celom priestore $\mathbb{E}^1$, vyhovuje rovnici $\frac{1}{2x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{z}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) u$.

42. Dokážte, že funkcia $z = f(x^2 + y^2)$, kde funkcia f je diferencovateľná na celom priestore $\mathbb{E}^1$, vyhovuje rovnici $x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

43. Nájdite deriváciu funkcie $f(X)$ v bode A v smere vektora $\vec{l}$ a jej gradient v bode A, ak:

a) $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$, $A = (3,1)$, $\vec{l} = B - A$, $B = (6,5)$;

b) $f(x,y) = 3x^4 - x^2y^3 + y^2$, $A = (1,-1)$ a uhol $\vec{l}$ s osou o_x je $\frac{\pi}{6}$ a s osou o_y je $\frac{\pi}{3}$;

c) $f(x,y,z) = 3x^3 - 4y^3 + 2z^4$, $A = (2,2,1)$, $\vec{l} = B - A$, $B = (5,4,6)$;

d) $f(x,y) = 3x^2 - 6xy^4 + 11y^5$, $A = (1,1)$, $\vec{l} = B - A$, $B = (4,5)$;

e) $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$, $A = (1,-1,3)$, $\vec{l} = B - A$, $B = (0,1,1)$;

f) $f(x,y,z) = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}$, $A = (1,1,1)$, $\vec{l} = 2\vec{j} + \vec{k}$;

g) $f(x,y) = 5x^2 - 6xy + 2y - 7$, $A = (0,1)$, $\vec{l} = (-1,0)$;

h) $f(x,y) = x(1+y^2) - 2e^y \cos x$, $A = (\pi,0)$, $\vec{l} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$;

i) $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$, $A = (-2,1,9)$, $\vec{l} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$;

j) $f(x,y,z) = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$, $A = (1,1,1)$, $\vec{l} = 8\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$.

44. Nájdite gradient funkcie $f(X)$ v bode A, ak:

a) $f(x,y) = \sqrt{4+x^2+y^2}$, $A = (1,2)$;

b) $f(x,y) = 3x^2y^3$, $A = (-\frac{1}{2},1)$;

c) $f(x,y) = \frac{x+y}{xy} + \frac{x^2-y^2}{x^2y^2}$, $A = (3,-1)$;

d) $f(x,y) = \ln(x + \frac{1}{y})$, $A = (\frac{7}{3}, -\frac{3}{4})$;

e) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $A = (1,1,1)$;

f) $f(x,y,z) = xyz$, $A = (1,2,3)$;

g) $f(x,y,z) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $A = (-3,4,2)$;

h) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $A = (4,3)$.

45. Nájdite smer, v ktorom je derivácia funkcie $f(x,y)$ v bode A najväčšia a určte aj jej hodnotu, ak:

a) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$, $A = (-1,2)$;

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 16$, $A = (0,2,-1)$;

c) $f(x,y,z) = x^y - z$, $A = (2,2,4)$;

d) $f(x,y) = \ln(x^2+4y^2)$, $A = (6,4)$.

46. Nájdite uhol, ktorý zvierajú gradienty funkcií $f(X)$, $g(X)$ v bode A, ak:

a) $f(x,y) = xy - x^2y^2$, $g(x,y) = \frac{1}{xy} + xy$, $A = (1,2)$;

b) $f(x,y,z) = 3x^2 + xy + xz^2 + yz$, $g(x,y,z) = y^2 - z^2 + xz + yz$, $A = (0,-1,1)$;

c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$, $g(x,y,z) = \arcsin \frac{x}{x+y}$, $A = (1,1,\sqrt{7})$.

47. Nájdite všetky body roviny, v ktorých sa gradient funkcie $f(x,y) = \ln(x + \frac{1}{y})$ rovná vektoru $\vec{i} - \frac{16}{9}\vec{j}$.

48. Vypočítajte parciálne derivácie druhého rádu nasledujúcich funkcií, ak:

a) $z = \ln(x^2 + y^2)$;

b) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

c) $z = xy + \frac{x}{y}$;

d) $z = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{x+y}$;

e) $z = y \cdot x^{\frac{x}{y}}$;

f) $z = x \sin(x + y) + y \cos(x + y)$;

g) $u = (x^2 - y^2)^3 z^2$;

h) $z = x^y$;

i) $z = e^{x \cdot e^y}$;

j) $z = \ln \frac{x^2+1}{y^2-1}$;

k) $z = xy + \cos(x - y)$.

49. Vypočítajte:

a) $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, ak $z = y \ln(xy)$;

b) $\frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y \partial x}$, ak $u = \cos(xyz)$;

c) $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}$, ak $z = \ln(x^2 + y^2)$;

d) $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, ak $z = \cos(\sin y + x)$;

e) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, ak $z = (x + y)^{x-y}$.

50. Výpočtom dokážte, že $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, ak:

a) $f(x, y) = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$;

b) $z = \operatorname{arctg}(y \operatorname{tg} x)$.

51. Výpočtom dokážte, že $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$, ak:

a) $f(x, y) = x \sin y + y \cos x$;

b) $f(x, y, z) = (x + y - z)^2 \cdot e^{xyz}$.

52. Vypočítajte parciálne derivácie druhého rádu nasledujúcich zložených funkcií:

a) $z = \ln(u^2 + v^2)$, kde $u = y \cos x$, $v = x \sin y$;

b) $z = u^2 \ln v$, kde $u = \frac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$;

c) $z = f(u, v)$, kde $u = x^2 + y^2$, $v = xy$ a funkcia f má spojité všetky parciálne derivácie druhého rádu;

d) $z = f(t, t^2, t^3)$, pričom f má spojité všetky parciálne derivácie druhého rádu.

53. Daná je funkcia $f(x, y)$, ktorá má spojité všetky parciálne derivácie druhého rádu. Dokážte, že $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \cdot \frac{1}{u^2} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{1}{u} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, ak $F(u, t) = f(x, y)$, kde $x = u \cos t$, $y = u \sin t$.

54. Dokážte, že funkcia $z = \frac{xy}{x-y}$ vyhovuje rovnici $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x-y}$.

55. Dokážte, že funkcia $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ vyhovuje rovnici $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{z}$.

56. Dokážte, že funkcia $z = \ln \frac{x^2-y^2}{xy}$ vyhovuje rovnici $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 2\left(\frac{1}{y^3} - \frac{1}{x^3}\right)$.

57. Dokážte, že funkcia $z = x(x+y)^2 + y\sqrt{x+y}$ vyhovuje rovnici $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

58. Dokážte, že funkcia $z = f(x-2t)+g(x+2t)$, kde funkcie f a g sú dvakrát diferencovateľné na celom priestore $\mathbb{E}^1$, vyhovuje rovnici $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

59. Dokážte, že funkcia $z = xf\left(\frac{x}{y}\right) + yg\left(\frac{x}{y}\right)$, kde funkcie f a g sú dvakrát diferencovateľné na celom priestore $\mathbb{E}^1$, vyhovuje rovnici $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

60. Dokážte, že funkcia $z = r^m \cos m\varphi$, kde m je číslo, vyhovuje rovnici $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = 0$.

61. Nájdite:

a) $d^3 f(A, X)$, ak $f(x,y,z) = xy^2 + yz^2 + x^2yz$, $A = (1,1,1)$;

b) $d^4 f(A, X)$, ak $f(x,y) = e^{2(x+y)}$, $A = (0,0)$;

c) $d^2 f(A, X)$, ak $f(x,y,z) = (x+y+z)^2 e^{x+y+z}$, $A = (1,0,1)$;

d) $d^2 f(A, X)$, ak $f(x,y) = x^2y^2$, $A = (1,1)$;

e) $d^2 f(A, X)$, ak $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $A = (3,2)$;

f) $d^4 f(A, X)$, ak $f(x,y) = e^{x-y^2} + \cos x$, $A = (0,0)$;

g) $d^2 f(A, X)$, ak $f(x,y,z) = xy + yz + xz$, $A = (1,-1,2)$;

h) $d^3 f(A, X)$, ak $f(x,y,z) = xyz$, $A = (7,11,-10)$;

ch) $d^3 f(A, X)$, ak $f(x,y) = x^4y - xy^4$, $A = (4,-3)$.

62. Nájdite n-tý Taylorov polynóm danej funkcie $f(x,y)$ v bode A, ak:

a) $f(x,y) = 3x^2 + 2xy - 8y^2 + 10x - 13$, $A = (2,-1)$, $n = 2$;

b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy$, $A = (1,1)$, $n = 3$;

c) $f(x,y) = \sin x \sin y$, $A = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, $n = 2$;

d) $f(x,y) = x^y$, $A = (1,1)$, $n = 3$;

e) $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$, $A = (0,0)$, $n = 3$;

f) $f(x,y) = e^{x+y}$, $A = (0,0)$, $n = 2$.

63. Rozviňte podľa Taylorovej vety funkciu $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 3xy + 1$ v bode $A = (1,2)$ pre $n = 2$.

64. Aproximujte funkciu $f(x,y) = e^x \sin y$ na okolí bodu $A = (0,0)$ polynómom tretieho stupňa.

65. Nájdite všetky lokálne extrémy nasledujúcich funkcií $f(x,y)$, ak:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y + 2$;
b) $f(x,y) = 4 - (x-2)^2 - (y+3)^2$;
c) $f(x,y) = (y - x - 2)^2$;
d) $f(x,y) = (1+x)^{\frac{2}{3}}(1-y)^{\frac{2}{3}}$;
e) $f(x,y) = 2x^3 + x^2y + 5y^2 + 2x^2$;
f) $f(x,y) = x^2y^2(1 - x - y)$;
g) $f(x,y) = x^3 + y^3$;
h) $f(x,y) = x^4 + y^4$;
i) $f(x,y) = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y$;
j) $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$;
k) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 6$;
l) $f(x,y) = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$;
m) $f(x,y) = (y-x)^2 + (y+2)^3$;
n) $f(x,y) = 2x^2 - 6xy + 5y^2 - x + 3y + 2$;
o) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2x - 2y$;
p) $f(x,y) = 27x^2y + 14y^3 - 69y - 54x$;
q) $f(x,y) = 5xy + \frac{25}{x} + \frac{8}{y}$, $x > 0$, $y > 0$;
r) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2)$;
s) $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$;
t) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$;
u) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$;
v) $f(x,y) = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$;
w) $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$;
x) $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$;
y) $f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y}$;
z) $f(x,y) = 6xy + y^3 - 4x^2$;
aa) $f(x,y) = x^4 + 2y^2 + 4xy$;
bb) $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y$;
cc) $f(x,y) = 3x^3 + 4xy^2 - 16y - 25x - 2$.

66. Nájdite viazané extrémy nasludujúcich funkcií $f(x,y)$:

a) $f(x,y) = xy - x + y - 1$, ak $x + y = 1$;

b) $f(x,y) = 1 - 4x - 8y$, ak $x^2 - 8y^2 = 8$;

c) $f(x,y) = x + 2y$, ak $x^2 + y^2 = 5$;

d) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, ak $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2$;

e) $f(x,y) = x^2 + y^2$, ak $3x + 2y - 6 = 0$;

f) $f(x,y) = x + y$, ak $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1 = 0$;

g) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, ak $x + y - 2 = 0$;

h) $f(x,y) = xy$, ak $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$, $a > 0$, $b > 0$;

i) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, ak $x^2 + y^2 = 1$;

j) $f(x,y) = x + y$, ak $x^2 + y^2 - 1 = 0$;

k) $f(x,y) = xy$, ak $x^2 + y^2 = 2$;

l) $f(x,y) = x^2 + y^2$, ak $x^2 + 9y^2 - 1 = 0$;

m) $f(x,y) = xy + x^2 + y^2$, ak $\ln(x + y) = 0$;

n) $f(x,y) = x + 3y$, ak $x^2 + y^2 = 10$.

67. Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu (globálne, absolútne extrémy) nasludujúcich funkcií $f(x,y)$ na uvedenej množine M, ak:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 1$, ak $M = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 2\}$;

b) $f(x,y) = x^3 + 2x^2 + y^2 - 2$, ak $M = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : x^2 \leq y \leq 4\}$;

c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, ak M je obdĺžnik s vrcholmi $A = (0,-1)$, $B = (2,-1)$, $C = (2,2)$, $D = (0,2)$;

d) $f(x,y) = 2x^2 - x + y^2$, ak M je trojuholník s vrcholmi $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (2,3)$;

e) $f(x,y) = xy^2(4 - x - y)$, ak M je ohraničená priamkami $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$;

f) $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$, ak M je daná nerovnosťami $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq -x + 3$;

g) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, ak $M = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$;

h) $f(x,y) = x^2 + y^2$, ak M je kruh $x^2 + y^2 \leq 4$;

i) $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, ak ak M je daná nerovnosťami $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$;

j) $f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 - 4y + 10$, ak M je kruh $x^2 + y^2 \leq 1$;

k) $f(x,y) = x - y$, ak M je kruh $x^2 + y^2 \leq 1$;

l) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - y - x$, ak M je trojuholník s vrcholmi $A = (-1,0)$, $B = (1,2)$, $C = (3,0)$;

m) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy + 2$, ak M je ohraničená krivkami $y = |x|$, $y = 2$.

5 Integrálny počet funkcie viac premenných

1. Zameňte poradie integrovania:

a) $\int\limits_1^2 \left(\int\limits_{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$; b) $\int\limits_0^2 \left(\int\limits_x^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$; c) $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$.

2. Vypočítajte nasledujúce dvojnásobné integrály:

a) $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 e^{x-y}\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$; b) $\int\limits_0^4 \left(\int\limits_0^{\sqrt{x}} x^2 y\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$; c) $\int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} x\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$.

3. Vypočítajte nasledujúce dvojné integrály na množine D, ak:

a) $\iint\limits_D x^2 y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D je obdĺžnik s vrcholmi $A=(0,1), B=(2,1), C=(2,2)$ a $E=(0,2)$;

b) $\iint\limits_D (2x+y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D je lichobežník určený priamkami $x=1, x=2, y=1$ a $y=4x$;

c) $\iint\limits_D (x^2+y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D je množina ohraničená krivkami $y=x^2$ a $y=x$;

d) $\iint\limits_D y^2 \sin x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D je množina ohraničená osou x a krivkou $y=1+\cos x$ pre $0 \le x \le \pi$;

e) $\iint\limits_D x^2 y e^{xy} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=\langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$;

f) $\iint\limits_D xy^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{E}^2:\ x^2+y^2-1\le 0, x+y-1\ge 0\}$;

g) $\iint\limits_D y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D je množina ohraničená krivkami $x^2-y+2=0, x+y-4=0$;

h) $\iint\limits_D xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D je množina ohraničená krivkami $xy=1, 2x+2y-5=0$;

i) $\iint\limits_D \frac{x}{y^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{E}^2:\ 1\le x\le y\le 3\}$;

j) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D je množina ohraničená krivkami $x=2, y=x, xy=1$;

k) $\iint\limits_D \sin y^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D je trojuholník s vrcholmi $A=(0,0), B=(9,3)$ a $C=(1,3)$;

l) $\iint\limits_D xy^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{E}^2:\ 0\le x\le 2, -x\le y\le x^2\}$;

m) $\iint\limits_D \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{E}^2:\ x^2-4x+5\le y\le 6x-3-x^2\}$;

o) $\iint\limits_D x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{E}^2:\ (y-2)^2\le x\le 4-y\}$;

p) $\iint\limits_D \frac{x}{x^2+2y^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{E}^2:\ 1\le x^2+y^2\le 25, 0\le x, x\sqrt{3}\le 3y\}$;

q) $\iint\limits_D \frac{y}{x^2} \, v$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{E}^2:\ 2\le x^2+y^2\le 9, x\frac{\sqrt{3}}{3}\le y\le x\sqrt{3}\}$;

r) $\iint\limits_D x^2y^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{E}^2:\ 2\le x^2+y^2\le 9, x\frac{\sqrt{3}}{3}\le y\le x\sqrt{3}\}$;

s) $\iint\limits_D \sqrt{xy}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,4\rangle;$

t) $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 :\ 4 \le x^2+y^2 \le 9\};$

u) $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 :\ \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\};$

v) $\iint\limits_D x^4\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad D$ je množina ohraničená krivkami $x = \cos y, x = 1, y = \frac{\pi}{2}$ a $y = 0;$

x) $\iint\limits_D \sqrt{xy - y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 :\ y \le x, \frac{1}{10}x \le y, y \le 2\};$

y) $\iint\limits_D x^2y\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad D$ je obdĺžnik s vrcholmi $A = (0,0), B = (1,0), C = (1,2)$ a $E = (0,1);$

z) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 :\ x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}.$

4. Vypočítajte nasledujúce dvojné integrály na množine D, ak:

a) $\iint\limits_D xy^2e^{xy}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D = \langle 0,2\rangle \times \langle 0,1\rangle;$

b) $\iint\limits_D x\ln y\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad D$ je množina ohraničená krivkami $y = 1, y = 3, x = 0$ a $x + y = 3;$

c) $\iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad D$ je množina prvého kvadrantu ohraničená krivkami $y = x^2$ a $y = 4;$

d) $\iint\limits_D xe^{x+y}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad D$ je množina ohraničená krivkami $y = \ln(x+1), y = x^2 - x$ a $x = 1;$

e) $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 :\ x^2+y^2 \le 4, 0 \le y\};$

f) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 :\ 9 \le x^2+y^2 \le 25, x \le y \le \sqrt{3}x\};$

g) $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 :\ 1 \le x^2+y^2 \le 9, x\frac{\sqrt{3}}{3} \le y \le x\sqrt{3}\};$

h) $\iint\limits_D \frac{xye^{x^2}}{y^2+3}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D = \langle 0,2\rangle \times \langle 0,3\rangle;$

i) $\iint\limits_D \frac{1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad D$ je množina ohraničená krivkami $y = 2x - x^2$ a $y = -x;$

j) $\iint\limits_D (x+1)y\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad D$ je množina ohraničená krivkami $y = x^2 - 4$ a $y = -3x;$

k) $\iint\limits_D (x+1)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad D$ je množina ohraničená krivkami $y = 2x, 2y = x$ a $y = 2;$

l) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad D$ je množina ohraničená krivkami $x^2+y^2 = 9, y = -x,\ y = -\sqrt{3}x$ a navyše platí $y \ge 0;$

m) $\iint\limits_D |xy|\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 :\ x^2+y^2 \le a^2, a > 0\};$

n) $\iint\limits_D \frac{1}{y}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $\quad D$ je množina ohraničená krivkami $xy = 1, y = x$ a $x = 4;$

o) $\iint\limits_D (1 - x^2 - y^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 :\ x \le y \le x\sqrt{3}, x^2+y^2 \le 1\}.$

5. Pomocou dvojného integrálu vypočítajte obsah plochy ohraničenej danými krivkami, ak:

a) $xy = 1, y^2 = x, y = 2, x = 0$;

b) $y = e^{2x}, y = e^x, x = 1$;

c) $y^2 = x, y = -2, y = x + 2, y = 2$;

d) $y = x^2 - 4x + 3, y = 0$;

e) $xy = 6, 3x - 2y = 0, x - 6y = 0$;

f) $y = x, y = 5x, x = 1$;

g) $y = x^2, 4x = y^2, y = 6$;

h) $y = e^{2x}, x + y = 1, x = 1$;

i) $y^2 = x - 1, y = \frac{x}{4}, y = 2$;

j) $y = \ln x, 0 = x - y, y = 1, y = 0$;

k) $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 9, y = 0, y = x\sqrt{3}$ v 1. kvadrante.

6. Pomocou dvojného integrálu vypočítajte obsah plochy ohraničenej:

a) trojuholníkom s vrcholmi $A = (0, 0), B = (1, 1)$ a $C = (2, 0)$;

b) trojuholníkom s vrcholmi $A = (-4, 0), B = (2, 0)$ a $C = (2, 6)$.

7. Pomocou dvojného integrálu vypočítajte obsah plochy množiny M, ak

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : \ y^2 \leq x \leq \frac{1}{2}y^2 + 1\right\}.$$

8. Vypočítajte objem telesa ohraničeného nasledujúcimi plochami:

a) $y = x^2, y = 1, x + y + z = 4, z = 0$;

b) $x^2 + y^2 = 4, x + y + z = 6, z = 0$;

c) $x = 0, y = 0, z = 0, z = y^2, 2x + 3y - 6 = 0$;

d) $z = 0, z = y^2, y = x^2$;

e) $z = 1 + x + y, z = 0, x = 0, y = 0, x + y = 1$;

f) $z = x^2 + y^2, x = 2, y = 3, x = 0, y = 0, z = 0$;

g) $y = x^2, z = 0, y + z = 2$;

h) $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$;

i) $x^2 + y^2 = 2, y = \sqrt{x}, y = 0, z = 0, z = 15x$;

j) $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 9, z = 0$.

Literatúra

[1] B.P. Děmidovič: *Sbírka úloh a cvičení z matematickej analýzy*, Fragment, Brno, 2003.

[2] J. Eliáš, J. Horváth, J. Kajan: *Zbierka úloh z vyššej matematiky 2,3,4*, SVTL, Bratislava, 1966.

[3] A. Hlaváček: *Sbírka řešených příkladu z vyšší matematiky II*, SPN, Praha, 1965.

[4] J. Klaška: *Cvičení z matematiky II (řešené úlohy)*, Brno, 2002.

[5] J. Kondáš, M. Kudláč: *Zbierka riešených a neriešených úloh z matematickej analýzy II*, Elfa, Košice, 2005.

[6] A. Piskorová, B. Semančíková: *Matematika II*, Elfa, Košice, 1995.

[7] M. Varga: *Zbierka úloh z matematickej analýzy*, Nitra UKF, Nitra, 2010.

[8] http://www.math.sk/skripta2/skripta2.html

[9] http://hore.dnom.fmph.uniba.sk/personal/vencko/

[10] **ďalšie zdroje žiadajte u cvičiaceho!**