1. Určte definičný obor a vyšetrite párnosť/nepárnosť funkcie $y = f(x)$, ak

$$f : y = \frac{\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{|x|-3} + \frac{1}{3}\right)}{\sqrt[7]{x-6}} + \sqrt{2x^2 + 2x - 4}.$$ [2,5b]

Zlomky, odmocnina a logaritmus nám dávajú dokopy štyri obmedzenia:

a) $|x| - 3 \neq 0$. Keďže rovnica $|x| = 3$ má riešenia práve -3 a 3, riešením danej nerovnice sú všetky čísla z $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

b) $x - 6 \neq 0$. Čiže $x \neq 6$.

c) $\frac{1}{|x|-3} + \frac{1}{3} > 0$. Môžeme ekvivalentne pokračovať:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|x|-3} + \frac{1}{3} &> 0 \\
\frac{3 + |x| - 3}{3(|x| - 3)} &> 0 \\
\frac{|x|}{3(|x| - 3)} &> 0 \\
x \neq 0 \wedge |x| - 3 &> 0 \\
x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)
\end{aligned}$$

d) $2x^2 + 2x - 4 \geq 0$. Tá je ekvivalentná kvadratickej nerovnici $x^2 + x - 2 \geq 0$, ktorá je zase po rozklade kvadratického trojčlena ekvivalentná nerovnici $(x + 2)(x - 1) \geq 0$. Grafickým riešením alebo metódou nulových bodov ľahko vidíme, že jej riešením je množina $(-\infty, -2\rangle \cup \langle 1, \infty)$.

Definičný obor funkcie f je množina $(-\infty, -3) \cup (3, 6) \cup (6, \infty)$. Keďže tento definičný obor obsahuje číslo -6, ale neobsahuje číslo 6, funkcia f nie je ani párna, ani nepárna.

2. Bez L'Hospitalovho pravidla vypočítajte limitu funkcie $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{1-\cos\sqrt{x}}$. [2b]

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{1-\cos\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{1-\cos\sqrt{x}} \cdot \frac{1+\cos\sqrt{x}}{1+\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x \cdot (1+\cos\sqrt{x})}{1-\cos^2\sqrt{x}} = \\
&= \lim_{x\to 0^+} (1+\cos\sqrt{x}) \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{\sin^2\sqrt{x}} = \\
&= 2 \cdot \lim_{x\to 0^+} x^2 \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{(\sqrt{x})^2}{\sin^2\sqrt{x}} = 2 \cdot \lim_{x\to 0^+} x = 0
\end{aligned}$$

3. Zistite, či daná funkcia je prostá. Ak áno, nájdite k nej inverznú funkciu a určte definičné obory obidvoch funkcií, ak $g : y = 6 + \sqrt{(x-1)^2 + 5}$. [1b]

Všimnime si najprv, že pod odmocninou sa nachádza kvadratická funkcia, ktorá nadobúda rovnaké hodnoty v bodoch, ktoré majú rovnakú vzdialenosť od bodu 1. Zvoľme teda napríklad $x_1 := -1$ a $x_2 := 3$. Funkcia g nadobúda v bodoch x_1 a x_2 rovnaké funkčné hodnoty, $g(x_1) = 9 = g(x_2)$, a teda funkcia g nie je prostá.

4. Určte deriváciu funkcie $y = h(x)$ (a upravte !!!), ak

$$h : y = \ln \frac{1-\sqrt{\sin x}}{1+\sqrt{\sin x}} + 2\mathrm{arctg}\, \sqrt{\sin x}. \qquad [2,5b]$$

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} \cdot \frac{-\frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x \cdot (1+\sqrt{\sin x}) - (1-\sqrt{\sin x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x}{(1+\sqrt{\sin x})^2} + \\
&+ 2 \cdot \frac{1}{1+\sin x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x = \\
&= \frac{-\frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\cos x + \cos x \cdot \sqrt{\sin x} + \cos x - \sqrt{\sin x} \cdot \cos x)}{(1-\sqrt{\sin x})(1+\sqrt{\sin x})} + \\
&+ \frac{\cos x}{(1+\sin x) \cdot \sqrt{\sin x}} = \\
&= \frac{-2\cos x}{2(1-\sin x) \cdot \sqrt{\sin x}} + \frac{\cos x}{(1+\sin x) \cdot \sqrt{\sin x}} = \\
&= \frac{-\cos x \cdot (1+\sin x) + \cos x \cdot (1-\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x) \cdot \sqrt{\sin x}} = \\
&= \frac{-2\cos x \cdot \sin x}{(1-\sin^2 x) \cdot \sqrt{\sin x}} = \\
&= \frac{-2\cos x \cdot \sin x}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\sin x}} = \\
&= -2\frac{\sqrt{\sin x}}{\cos x}
\end{aligned}$$

5. Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode A, ak $f : y = x^2 - 6x + 14$ a A= $[?, 6]$. [1,5b]

Zistime najprv x-ovu súradnicu bodu A. Bod A patrí grafu funkcie f, preto jeho x-ova súradnica je riešením kvadratickej rovnice $6 = x^2 - 6x + 14$. Ekvivalentnými úpravami získame kvadratickú rovnicu $(x-2)(x-4) = 0$, ktorá má dva korene $x_1 = 2$ a $x_2 = 4$. Označme jeden dotykový bod $A_1 = [2, 6]$ a druhý dotykový bod $A_2 = [4, 6]$.
Derivácia funkcie f má predpis $f'(x) = 2x - 6$. Smernica dotyčnice prechádzajúcej dotykovým bodom A_1 je rovná $f'(2) = -2$. Dotyčnica, t_1, v bode A_1 má predpis

$$\begin{aligned} t_1 : y &= 6 - 2(x-2) \\ y &= -2x + 10. \end{aligned}$$

Smernica dotyčnice prechádzajúcej dotykovým bodom A_2 je rovná $f'(4) = 2$. Dotyčnica, t_2, v bode A_2 má predpis

$$\begin{aligned} t_2 : y &= 6 + 2(x-4) \\ y &= 2x - 2. \end{aligned}$$

6. Dokážte, že platí

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} < \text{tg } b - \text{tg } a < \frac{b-a}{\cos^2 b}, \quad 0 \le a < b < \frac{\pi}{2}. \qquad [2{,}5\text{b}]$$

Keďže $a < b$, tak $b - a > 0$ a daný vzťah môžeme prepísať ekvivalentne

$$\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{\text{tg } b - \text{tg } a}{b-a} < \frac{1}{\cos^2 b}, \quad 0 \le a < b < \frac{\pi}{2}.$$

Teraz vidno, že ohraničovaný výraz sa spomína v Lagrangeovej vete a ohraničujúce výrazy sú derivácie funkcie tangens v bodoch a a b. Keďže $0 \le a < b < \frac{\pi}{2}$, funkcia tangens je na intervale $\langle a, b \rangle$ spojitá a na intervale (a, b) diferencovateľná. Tým su splnené predpoklady Lagrangeovej vety, a teda existuje $c \in (a, b)$ také, že

$$(\text{tg } c)' = \frac{\text{tg } b - \text{tg } a}{b-a}.$$

Navyše vieme, že $(\text{tg } c)' = \frac{1}{\cos^2 c}$. Preto sa pokúsime ohraničit túto deriváciu:

$$\begin{gathered} a < c < b \\ \cos a > \cos c > \cos b \\ \cos^2 a > \cos^2 c > \cos^2 b \\ \frac{1}{\cos^2 a} < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 b}. \end{gathered}$$

V poslednej nerovnosti už iba stačí zameniť deriváciu tangensu v c za spomínaný výraz z Lagrangeovej vety. Pri ohraničovaní derivácie sme silno využili, že funkcia kosínus je na intervale $(0, \frac{\pi}{2})$ klesajúca a nadobúda kladné hodnoty.

7. Nájdite všetky lokálne extrémy a asymptoty ku grafu funkcie $y = g(x)$ a vyšetrite jej monotónnosť, ak $g : y = \dfrac{x^2+1}{2x}$. [3b]

Definičný obor funkcie g je množina $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. g je spojitá na svojom definičnom obore. Jej derivácia v ľubovoľnom bode $x \in \mathcal{D}(g)$ je nasledovná:

$$g'(x) = \frac{2x2x - (x^2+1)2}{4x^2} = \frac{2x^2-2}{4x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{2x^2}.$$

Z toho hneď vidíme, že stacionárne body sú čísla 1 a -1. Teda derivácia môže zmeniť znamienko jedine v bodoch $-1, 0, 1$. Ľahko vidieť, že derivácia funkcie g nadobúda kladné hodnoty na intervaloch $(-\infty, -1), (1, \infty)$ a záporné hodnoty na intervaloch $(-1, 0), (0, 1)$. Z toho potom dostávame, že funkcia g je rastúca na intervaloch $(-\infty, -1), (1, \infty)$ a klesajúca na intervaloch $(-1, 0), (0, 1)$. V bode -1 potom g nadobúda ostré lokálne maximum -1 a a v bode 1 ostré lokálne minimum 1.

g je nedefinovaná alebo nespojitá v bode 0, preto priamka s rovnicou $x = 0$ je jediný kandidát na asymptotu bez smernice. Z nasledujúcej limity vidno, že ňou aj je.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2+1}{2x} = \infty$$

K nájdeniu asymptôt so smernicou funkcie g vypočítame nasledujúce štyri limity:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+1}{2x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2+1}{2x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{2x^2} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{2x} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+1}{2x} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}\frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{x} = 0$$

Z týchto limít potom vieme, že priamka s rovnicou $y = \frac{x}{2}$ je asymptotou so smernicou ku grafu funkcie g v bode $+\infty$ i v bode $-\infty$.