UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH

PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA

ÚSTAV MATEMATICKÝCH VIED

PRÍKLADY K PREDMETU MATEMATICKÁ ANALÝZA 1 PRE INFORMATIKOV A FYZIKOV

(ÚMV/MAN3a/10, ZIMNÝ SEMESTER 2012/2013)

Košice 2011

RNDr. Ivan Mojsej, PhD

Obsah

1 Reálne čísla

1.1 Rovnice a nerovnice

1. Zjednodušte výrazy a určte podmienky, za ktorých majú zmysel.

a) $\frac{r^4-s^4}{r^2s^2} : \left[\left(1+\frac{s^2}{r^2}\right)\cdot\left(1-\frac{2r}{s}+\frac{r^2}{s^2}\right)\right]$;

b) $\left(v-\frac{v-u}{1+uv}\right) : \left(1-\frac{v(u-v)}{1+uv}\right)$;

c) $\left[a\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}\right] : \left[\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}+\left(\frac{b+\sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}\right]$;

d) $\sqrt{\frac{(1+x)\sqrt[3]{1+x}}{3x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9+18x^{-1}+9x^{-2}}}$;

e) $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{z+\frac{1}{z}}}}$;

f) $a^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{y^{-\frac{1}{3}}\cdot a\sqrt{y^{\frac{4}{3}}}}\cdot\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{y}}$;

g) $\left(\frac{2-c\sqrt{c}}{2c-\sqrt{c}}+\sqrt{c}\right)\cdot\left(\frac{2+c\sqrt{c}}{2c+\sqrt{c}}-\sqrt{c}\right) : \frac{4+c^2}{4c-1}$;

h) $\frac{q\cdot\sqrt{q^{\frac{1}{3}}}}{\sqrt[3]{(\sqrt{q}\cdot q^{-2})^2}}+\sqrt[5]{\left(\frac{\sqrt{q}\cdot q^{-2}}{q^{\frac{1}{3}}}\right)^{-2}}$;

i) $\left(\frac{5a}{a+x}+\frac{5x}{a-x}+\frac{10ax}{a^2-x^2}\right)\cdot\left(\frac{a}{a+x}+\frac{x}{a-x}-\frac{2ax}{a^2-x^2}\right)$;

j) $\frac{\frac{2t}{\sqrt{t+1}}+\sqrt{t-1}}{1+\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}}\cdot\frac{2t}{(t+1)\sqrt{t+1}-(t-1)\sqrt{t-1}}$;

k) $\left(\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right) : \left(\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}-\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)$;

l) $\left[\frac{a+3b}{(a-b)^2}-\frac{3b-a}{a^2-b^2}\right] : \frac{a^2+3b^2}{(a-b)^2}$;

m) $\left(\frac{2x}{x+y}+\frac{y}{x-y}+\frac{y^2}{y^2-x^2}\right) : \left(\frac{1}{x+y}+\frac{x}{x^2-y^2}\right)$.

2. Riešte na príslušných oboroch dané rovnice a nerovnice.

a) v $\mathbb{N}$: $\frac{3x-1}{3}-\frac{3x-2}{6}+\frac{x}{2}=x-1$;

b) v $\mathbb{R}$: $\frac{3t-1}{t+5}-\frac{2t}{t-3}<1$;

c) v $\mathbb{R}$: $(y^2-5y+2)^2+6(y^2-5y+1)+14=0$;

d) v $\mathbb{Z}$: $z^2+5z+32\leq 0$;

e) v $\mathbb{R}$: $\frac{s}{s-2}-\frac{3}{s+1}\leq 1$;

f) v $\mathbb{R}$: $\frac{R^2-5R+6}{R^2+R+1}<0$;

g) v $\mathbb{R}$: $1 < \frac{4u-1}{5-u} < 4$;

h) v $\mathbb{N}$: $\frac{(a+2)(a^2-2a+1)}{4+3a-a^2} \geq 0$;

i) v $\mathbb{R}$: $\frac{2(K-4)}{(K-1)(K-7)} \geq \frac{1}{K-2}$;

j) v $\mathbb{N}$: $\frac{2x-1}{5} - \frac{3-2x}{4} < 3 - \frac{x-1}{2}$.

3. Riešte v $\mathbb{R}$.

a) $3r - |2r-1| = r+1$;

b) $|t+2| - 2|1-t| = -6$;

c) $|3 - |2-Y|| \leq 2Y$;

d) $||w|+3| - 3w = -7$;

e) $|1-2b| + |2+3b| < 11$;

f) $\left|\frac{2m-1}{m-1}\right| > 2$;

g) $\frac{|y+2|-y}{y} < 2$;

h) $\frac{s^2+6s-7}{|s+4|} < 0$;

i) $\frac{3}{|u+1|} \geq 1$;

j) $|N^2+1| \leq 2N+1$;

k) $|1-|y|| = 1$;

l) $3|x-1| + |3x-1| \leq x-1$;

m) $||3+z| - |z+6|| - 2 < z$;

n) $\frac{|2+3u|}{4u-1} > 1$.

4. Riešte v $\mathbb{R}$.

a) $3\sqrt{x+5} = 5-x$;

b) $\sqrt{3t+4} - \sqrt{t-3} = \sqrt{2t+1}$;

c) $\sqrt{9y^2 + 4\sqrt{6y+2}} = 3y+2$;

d) $\sqrt{2z-1} < z-2$;

e) $r - 3\sqrt{r-3} - 1 > 0$;

f) $x - 3 < \sqrt{x^2+4x-5}$;

g) $a - 1 < \sqrt{5-a^2}$;

h) $\sqrt{\frac{-3}{10+2q+q^2}} \geq 0$;

i) $2 + \sqrt{10-x^2} = x$;

j) $3\sqrt{y} - \sqrt{y+3} > 1$;

k) $\sqrt{8+2z-z^2} > 6-3z$.

5. Riešte v $\mathbb{R}$.

a) $3 \cdot 7^x + 5 - 2 \cdot 7^{-x} < 0$;

b) $\log_{\frac{1}{5}}(y^2 - 6y + 18) + 2\log_5(y-4) < 0$;

c) $2\log_5 x - \log_x 125 < 1$;

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{|t+2|}{2-|t|}} > 9$;

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 0$;

f) $4^x - 3 \cdot 2^x < 4$;

g) $\log_3(4^t - 3) + \log_3(4^t - 1) = 1$;

h) $z^{3+4\log z} - 10z^6 = 0$;

i) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{2-3p}{p} \geq -1$;

j) $\frac{2^{1-a} - 2^a + 1}{2^a - 1} \leq 0$;

k) $\log_4 \log_3 \log_2 x = 0$;

l) $8^{\sqrt{8y}} > 4096$;

6. Riešte v $\mathbb{R}$:

a) $\log_x \frac{1}{4} + \log_4 \frac{1}{x} \leq -2$;

b) $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$;

c) $x^{\log x} > 100x$;

d) $\log_2(4^x + 1) = x + \log_2(2^{x+3} - 6)$;

e) $\log_{\frac{1}{2}} \log \frac{x}{1+x} > 0$;

f) $\frac{\log^2 x - 3\log x + 3}{\log x - 1} < 1$;

g) $\log_{x-1}(x+1) > 2$;

h) $\log\sqrt{1-x^2} - \log\sqrt{1+x} = 3\log\sqrt{1-x} - 2$.

1.2 Matematická indukcia

1. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla platí:

a) $6 / (4n^3 + 2n)$;

b) $9 / (7^n + 3n - 1)$;

c) $133 / \left(11^{n+1} + 12^{2n-1}\right)$;

d) $7 / \left(2^n + 3^{2n}\right)$;

e) $30 / \left(11^{4n+1} - 11\right)$;

f) $7 / \left(n^7 - n\right)$;

g) $31 / \left(5^{n+1} + 6^{2n-1}\right)$.

2. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla platí:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

b) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$;

c) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$;

d) $1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + \cdots + (-1)^{n-1}(2n-1)^2 = (-1)^{n-1}\frac{(2n-1)(2n+1)}{2} - \frac{1}{2}$;

e) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$;

f) $\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$;

g) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

3. Dokážte, že platí:

a) $\forall n \in \mathbb{N}:\ (2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$;

b) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3:\ n^{n+1} > (n+1)^n$;

c) $\forall n \in \mathbb{N}:\ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} \geq \frac{1}{3}$;

d) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2:\ n + 1 < 2^n$;

e) $\forall n \in \mathbb{N}:\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$;

f) $\forall n \in \mathbb{N}:\ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

g) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5:\ 2^n > n^2 + 2$.

1.3 Vlastnosti množín reálnych čísel

1. Dokážte, že číslo 5 nie je dolným ohraničením množiny $A = \{y \in \mathbb{R};\ y = 6 \cdot 5^x - 25^x,\ x \in \mathbb{R}\}$.

2. Dokážte, že číslo $\frac{1}{2}$ nie je horným ohraničením množiny $B = \left\{y \in \mathbb{R};\ y = \frac{1}{|x| - 3},\ x \in \mathbb{R}\right\}$.

3. Vyšetrite ohraničenosť nasledujúcich množín:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R};\ \dfrac{x^2 - 7|x| + 10}{x^2 - 6x + 9} < 0\right\}$;

b) $B = \left\{x \in \mathbb{R};\ x = \dfrac{n^2 - 1}{n(n+1)} \cdot \sin \dfrac{2^n}{n+3} - \dfrac{(-1)^n}{n^2 + n + 1} \cdot \cos \dfrac{(-1)^n n}{3^n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R};\ x = \dfrac{n^2 + 1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$

d) $D = \left\{x \in \mathbb{R};\ x = \dfrac{3n - 2}{1 - 6n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

e) $E = \left\{x \in \mathbb{R};\ x = \sqrt{n+1} - \sqrt{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

f) $F = \left\{x \in \mathbb{R};\ \dfrac{|2 + 3x|}{4x - 1} > 1\right\}$;

g) $G = \left\{x \in \mathbb{R};\ x = \sin n! + \cos \dfrac{n!}{2^n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

4. Dokážte, že žiadne z čísel 1 a 2 nie je supremom množiny $C = \left\{x \in \mathbb{R};\ x = \dfrac{3n+1}{1+2n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

5. Dokážte, že:

a) $\sup\left\{x \in \mathbb{R};\ x = \frac{2n+1}{3n-7},\ n \in \mathbb{N}\right\} = \frac{7}{2}$;

b) $\inf\left\{x \in \mathbb{R};\ x = \frac{4n+5}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\} = 4$;

c) $\sup\left\{x \in \mathbb{R};\ x = \frac{4n-3}{2n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\} = 2$;

d) $\inf\left\{x \in \mathbb{R};\ x = \frac{1-2n}{5n+3},\ n \in \mathbb{N}\right\} = -\frac{2}{5}$.

6. Nájdite maximum, minimum, supremum, infimum (ak existujú) nasledujúcich množín:

a) $A = (-2, 4\rangle$;

b) $B = (-3, 1\rangle \cup \langle 10, 15)$;

c) $C = \left\{x \in \mathbb{R};\ 2x + \sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8\right\}$;

d) $D = \left\{x \in \mathbb{R};\ x = \dfrac{6+n}{3n+2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

e) $E = \left\{x \in \mathbb{R};\ x = \dfrac{1+3n}{3-2n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

f) $F = \left\{x \in \mathbb{R};\ x = \dfrac{n}{n^2+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

g) $G = \left\{x \in \mathbb{R};\ x = \dfrac{7n-8}{5+2n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

h) $H = \left\{x \in \mathbb{R};\ x = (-1)^n \dfrac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

i) $I = \{0,5; 0,55; 0,555; \ldots\}$.

2 Číselné postupnosti

2.1 Vlastnosti postupností

1. Nájdite všeobecný člen (explicitný tvar) postupnosti danej rekurentne.

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n^2 + 1},\ n \in \mathbb{N}$

b) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\, a_n,\ n \in \mathbb{N}$

c) $b_1 = 2,\ b_{m+1} = 3b_m,\ m \in \mathbb{N}$

d) $b_1 = -1,\ b_{m+1} = (m+1)b_m,\ m \in \mathbb{N}$

2. Vyjadrite rekurentným vzťahom danú postupnosť.

a) $c_k = \dfrac{k}{k+1},\ k \in \mathbb{N}$

b) $c_k = -1 + (-1)^k,\ k \in \mathbb{N}$

c) $d_m = \sqrt{7^m},\ m \in \mathbb{N}$

d) $d_n = n^2 - 1,\ n \in \mathbb{N}$

3. Vyšetrite ohraničenosť a monotónnosť daných postupností.

a) $b_m = \dfrac{\sqrt{m^2+1}}{m+1},\ m \in \mathbb{N}$

b) $b_m = (-1)^{m+1}\dfrac{2m+3}{m+7},\ m \in \mathbb{N}$

c) $c_k = \dfrac{1+2+\ldots+k}{k^2},\ k \in \mathbb{N}$

d) $c_k = 2^{\sqrt{k}},\ k \in \mathbb{N}$

e) $d_n = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}},\ n \in \mathbb{N}$

f) $d_n = \dfrac{1}{2}(1 - \cos n\pi),\ n \in \mathbb{N}$

g) $a_n = \dfrac{n^2-1}{10n},\ n \in \mathbb{N}$

h) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n,\ n \in \mathbb{N}$

i) $b_k = \dfrac{k^2+24}{k+1},\ k \in \mathbb{N}$

j) $b_k = \dfrac{4-k^2}{k^2},\ k \in \mathbb{N}$

k) $c_k = 1 + (-1)^k,\ k \in \mathbb{N}$

l) $a_n = \dfrac{2n}{n+1} + \dfrac{n+1}{3n},\ n \in \mathbb{N}$

m) $d_k = \dfrac{2k-1}{k+2},\ k \in \mathbb{N}$

n) $b_n = \dfrac{n\sqrt{n}}{3n+4},\ n \in \mathbb{N}$

2.2 Limita postupnosti

1. Dokážte z definície limity, že platí:

a) $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{2^m+1}{2^m} = 1;$

b) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k^2+3k+1}{2k^2+2} = \dfrac{1}{2};$

c) $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{m}{1-2m} = -\dfrac{1}{2};$

d) $\lim\limits_{k\to\infty} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = 0;$

e) $\lim\limits_{m\to\infty} \ln \dfrac{m+1}{m+2} = 0;$

f) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1} = 0;$

g) $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{m}}{1+\sqrt{2m}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2};$

h) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{2\cos\frac{k!}{3^k}-7k}{k+4} = -7;$

i) $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{m-1}{m+1} = 1;$

j) $\lim\limits_{k\to\infty} (-0,999)^k = 0.$

2. Dokážte z definície limity, že platí:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{n+3} \neq 3;$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{n} \neq 1;$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n}{2n+1} \neq \dfrac{1}{2};$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n-2}{5-10n} \neq -1;$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3^n} \neq 10^{-100};$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{3+4n} \neq \dfrac{99}{400}.$

3. Dokážte z definície limity, že postupnosť $\{0,9; 0,99; 0,999; \dots\}$ má limitu 1.

4. Dokážte, že nasledujúce postupnosti sú konvergentné a potom pomocou definície nájdite ich limity.

a) $a_n = \dfrac{7-n}{2n+3},\ n\in\mathbb{N};$

b) $a_n = \dfrac{7-3^n}{2\cdot 3^n+3},\ n\in\mathbb{N}.$

5. Vypočítajte nasledujúce limity postupností.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+\sqrt{n^3+1}}{n^2+n+1};$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{2n^2+1}{3-n^2}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{3n-1}{5n^2+4}\right)\right];$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n};$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n^3}(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1})\right];$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}}{n};$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+5n+2}-\sqrt{n^2+3n-7});$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n};$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n+1}-\sqrt[3]{n^3-n+1}\right);$

ch) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5-2^{-n}+4\cdot 5^{-n}}{3n+2+n\cdot 3^{-n}}\right);$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} (3n-\sqrt{9n^2-10n+1});$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\dots+n}{\sqrt{9n^4+1}};$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right);$

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n^{2^n}+\cos 2^{n^n}}{1+2+\dots+n};$

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n};$

n) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}};$

o) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n(n+a)}-n\right),\ a\in\mathbb{R};$

ô) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}};$

p) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^5+3n+1}+\sqrt{5n^2+3n}}{\sqrt{2n^3+4n+1}-\sqrt[3]{5n^5+1}};$

q) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$;

r) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+i\right)\frac{in-3}{n\sqrt{n}+i}\right]$, $i^2=-1$;

s) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$;

t) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2n^3+5n^2-7}\right)$;

u) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-1)!-n!}$;

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{U}{S}\left(1-e^{-\frac{Sn}{L}}\right)\right]$, $U,S,L\in\mathbb{R}$;

w) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$;

x) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}$, $b>a>0$;

y) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n^2-1}\cos\frac{n+1}{2n-1}\right)$;

z) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n-1}{2n^2-n+1}\right)^3$.

6. Vypočítajte nasledujúce limity postupností.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n^3+1}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} E(\sqrt{n})$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}\right)$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1-\sqrt[3]{n}}$;

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n-2}{1+3n}\right)^{5n-3}$;

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{\sqrt{2\pi n}}$;

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n+\cos(n!)}{3n+4}$;

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{E(nx)}{n}$, $x\in\mathbb{R}$;

n) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+5^n}$;

o) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n-4}{4n+1}\right)^{4n-3}$;

p) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{1-2n}\right)^{2n-1}$;

q) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+n+1}$;

r) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{5n+2}\right)^{2n-3}$;

s) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1-2n}{n-5}\right)^{4-2n}$;

t) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n n!}{(3n)^n}$;

u) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$;

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5n+1}{n+5}}$;

w) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{n-5}\right)^{6n+5}$;

x) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{4n-5}\right)^{2n+3}$;

y) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}$;

z) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

7. Vypočítajte nasledujúce limity postupností.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+5}{2n-4}\right)^{\frac{n}{2}}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n}-n)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4-5n}{n^2-3n+1}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[5]{n^7+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[5]{n^7}-1}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1-3n}{4+3n}\right)^{2n-4}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+\sin n}{3n-1}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right]$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right]$, $k\in\mathbb{N}$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{n^{\frac{11}{n}}}{n^2-n+1} \sin(n^2-n+1)\right]$; j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{10}+(n+2)^{10}+\cdots+(n+100)^{10}}{n^{10}+100^{10}}$;

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n^{12}} + \frac{\sqrt[n]{\pi}\sin 2^n}{n^2-2n} - \frac{1-2n}{4-2n}\right)$; l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-a^n}{3a^n+1}$, $a>0$.

8. Nájdite všetky čísla $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+2} + an + b\right) = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n+2} + an + b\right) = 0$.

9. Zistite, ktoré z nasledujúcich divergentných postupností majú nevlastnú limitu.

a) $a_n = \frac{n^3 \cos n\pi}{n^2+2n-1}$; b) $a_n = \frac{n^4-10n^3}{n+5}$;

c) $b_n = -\frac{n^2}{1+n\sqrt{n}}$; d) $b_n = n^3 \cos^2 n\pi$;

e) $c_n = (1-\sqrt{n})^2$; f) $c_n = \sin \frac{2\pi n}{3}$;

g) $d_n = n^{(-1)^n}$; h) $d_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$;

i) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$; j) $a_n = (-n)^n$.

10. Z definície dokážte, že:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7-n^2}{n} = -\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = +\infty$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (2-n^3) = -\infty$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 + \ln n) = +\infty$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\sqrt{n-1}} = +\infty$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} (3+n^2) = +\infty$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = +\infty$, $k \in \mathbb{N}$; h) $\lim\limits_{n\to\infty} (-\sqrt{n}) = -\infty$.

11. Vyšetrite ohraničenosť množiny M, ak

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R};\ x = \frac{\frac{n}{n^2-1} \sin \frac{n}{2n-1} - \frac{n}{1-2n} \cdot \frac{(-1)^n n}{n^2+1}}{\frac{3n^2+4n+1}{n^2+n+2} - \left(\frac{n+4}{2n+2}\right)^{n+4}},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3 Nekonečné číselné rady

3.1 Postupnosť čiastočných súčtov - definícia

1. Riešte v $\mathbb{R}$:

a) $\log x + \log \sqrt[3]{x} + \log \sqrt[9]{x} + \log \sqrt[27]{x} + \cdots = 6$;

b) $1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^4 x - \cdots = \frac{\operatorname{tg} 2x}{1+\operatorname{tg} 2x}$.

2. Vyjadrite v tvare zlomku v základnom tvare číslo $3,\overline{123}$ a $0,4\overline{90}$.

3. Nájdite n-tý člen radu, ak sú všetky členy radu vytvorené podľa toho istého pravidla:

a) $\frac{1}{2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 8} + \ldots$;

b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{1}{42} + \ldots$;

c) $1 - \frac{5}{6} + \frac{8}{18} - \frac{11}{54} + \ldots$

d) $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \ldots$.

4. Nájdite n-tý čiastočný súčet nekonečného radu a rozhodnite o jeho konvergencii:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^n$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\alpha}{2^{n+1}} \cos \frac{3\alpha}{2^{n+1}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$;

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^{n+1}}{6^n}$;

j) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-2n}$.

5. Z definície nájdite súčet nekonečného radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$ a určte koľko členov daného radu treba najmenej zobrať, aby čiastočný súčet aproximoval súčet daného radu s chybou menšou ako 10^{-4}.

3.2 Kritériá konvergencie radov

1. Na základe kritérií rozhodnite o konvergencii nasledujúcich radov:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{3}{8}\right)^n$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^{n+1}}}$;

c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$;

d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n(2^n-1)}$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-4)^2}$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}$;

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+3n-4}{2n^2+5}\right)^3$;

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^3}$;

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(\sqrt{n^2+n\sqrt{n}}-n\right)}$;

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 5^n}$;

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2}{1000n^2+3}$;

n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)!}$;

o) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}+\binom{n}{3}}{\binom{n}{4}+\binom{n}{5}}$;

p) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}\right)$;

q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!+1}{(n+2)!+2}$;

r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$;

s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$;

t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{3^n}}$;

u) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$;

v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$;

w) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5 \ldots (6n-7)(6n-4)}{1\cdot 5 \ldots (8n-11)(8n-7)}$;

x) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{[5+(-1)^n]^n}$;

y) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$;

z) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

2. Na základe kritérií rozhodnite o konvergencii nasledujúcich radov:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-\sqrt{13}}\right)^n$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[\ln(n+1)]^{n+1}}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+\frac{1}{n}}}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+3)^3}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n(n+2)}$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2\sqrt{n}}$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n}{6^n}$;

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{6n-5}$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{(-3)^n}$;

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{4^n}$;

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{100}\cdot 99^n}{100^n}$;

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

m) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sin\left(\frac{3+(-1)^n}{n^2}\right)$;

n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3+2(-1)^n n}{n+1}$;

o) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$;

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$;

q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$;

r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+1}}$;

s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3^n} - \frac{3}{5^n}\right)$;

t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$;

u) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$;

v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$;

w) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+1}$;

x) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+7}\right)^{3n+1}$.

3. Vypočítajte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^n}{n!}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(2n-1)^n}$.

4. Pre ktoré $x \in \mathbb{R}$ sú dané rady absolútne konvergentné, relatívne konvergentné a divergentné?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n x$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3 \cdot 2^n} \cdot x^n$.

4 Funkcia jednej reálnej premennej

4.1 Vlastnosti funkcií

1. Nájdite definičné obory nasledujúcich funkcií:

a) $f_1 : y = \log_{\sqrt{2}}(e^x - e^{-x})$;

b) $f_2 : y = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$;

c) $f_3 : y = \ln(1 - \log_6(x^2 - 5x + 16))$;

d) $f_4 : y = \log\left(1 - \sqrt{\frac{x-4}{x+1}}\right)$;

e) $f_5 : y = \log_4 \frac{4x+3}{5-2x} + \sqrt{\log_4(6x-1)}$;

f) $f_6 : y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$;

g) $f_7 : y = (\log\cos x)^{\frac{1}{8}}$;

h) $f_8 : y = \frac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$;

i) $f_9 : y = \sqrt{\log\log x}$;

j) $f_{10} : y = \sqrt{\ln\frac{3x-2}{5x+1}}$;

k) $f_{11} : y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$;

l) $f_{12} : y = \frac{2}{3 - E(x)}$.

2. Ktoré z uvedených funkcií sa rovnajú?

$$f : y = \frac{1}{x^2 + x}; \quad g : y = \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^2}}; \quad h : y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

3. Nájdite $(f \circ f)(x) = f(f(x))$, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ a $(g \circ g)(x) = g(g(x))$ a určte ich definičné obory, ak:

a) $f : y = \sqrt{x^3}$, $\quad g : y = 1 - x^2$;

b) $f : y = \frac{x+1}{x-1}$, $\quad g : y = \sqrt{x}$;

c) $f : y = x^2$, $\quad g : y = 2^x$;

d) $f : y = \sqrt{x+2}$, $\quad g : y = \frac{1}{x+2}$;

e) $f : y = \begin{cases} x, & x \in \langle 0, +\infty) \\ 0, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$, $\quad g : y = \begin{cases} 0, & x \in \langle 0, +\infty) \\ x^2, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$.

4. Nájdite zložené funkcie $f_2 = f \circ f$, $f_3 = f \circ f \circ f, \ldots, f_n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ak $f : y = 1 + x$.

5. Vyšetrite párnosť, resp. nepárnosť nasledujúcich funkcií:

a) $g_1 : y = \frac{x}{2^x - 1}$;

b) $g_2 : y = x^2 + \sin x^2$;

c) $g_3 : y = x \ln x$;

d) $g_4 : y = \frac{x^2}{1+x^2}$;

e) $g_5 : y = \frac{x}{|x|}$;

f) $g_6 : y = \frac{x^2-1}{x+x^3}$;

g) $g_7 : y = \frac{\sin x + |x| \sin x}{2}$;

h) $g_8 : y = \frac{1}{1+\cos^3 x}$.

i) $g_9 : y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$;

j) $g_{10} : y = \frac{\ln \cos x}{\sqrt{3-x^2}} \cdot \cos \frac{x}{3}$;

m) $f_{11} : y = x - x^2$;

n) $f_{12} : y = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

6. Vyšetrite monotónnosť (určte intervaly monotónnosti) nasledujúcich funkcií:

a) $f : y = \sqrt[3]{2-3x}$;

b) $g : y = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$;

c) $h : y = \frac{2x+4}{x+3}$;

d) $f : y = |x+3| - |x|$;

e) $h : y = x^3 - x$;

f) $g : y = 5^{\frac{x-1}{x}}$.

7. Vyšetrite ohraničenosť nasledujúcich funkcií na daných množinách (ak nie je daná žiadna množina, znamená to na celom definičnom obore):

a) $f : y = \frac{2x^2-13}{x^2+5}$;

b) $g : y = \frac{x-1}{(2x-3)(x-2)}$ na $A = (3, +\infty)$;

c) $h : y = \frac{1}{1-x^2}$ na $A = (-1, 1)$;

d) $f : y = \frac{2\sin x - 5\cos x}{2x^2+3}$;

e) $g : y = \frac{|x|}{2} - 3$;

f) $h : y = \frac{5\sqrt{x}}{1+4\sqrt{x}}$.

4.2 Limita funkcie

1. Dokážte z definície limity funkcie, že platí:

a) $\lim\limits_{x\to -2} x^2 = 4$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} (3x-1) = 2$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-1}{3x-1} = \frac{2}{3}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = +\infty$, $a > 1$;

e) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} (x^2 + 2x) = 0$;

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$;

h) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$;

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = 1$;

j) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$;

k) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{-1}{(x+1)^2} = -\infty$;

l) $\lim\limits_{x\to 1} (2x+1) = 3$.

2. Vypočítajte nasledujúce limity funkcií:

a) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x^3}-8}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$, $a \in \mathbb{R}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x^4-1}\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$, $a > b \geq 0$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$;

i) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{|(x-1)(x+3)|}$;

j) $\lim\limits_{x\to 1} x\cdot \operatorname{sgn}(x-1)$;

k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^5-x^4}{\sqrt[3]{1+x^4}-1}$;

l) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$;

m) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{5x^2-x}{x^2-3}-\frac{3x^3-4}{x^3-x}\right)^4$;

n) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(-1)^{E(x)}}{x-2}$;

o) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}}{x-1}$;

p) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$;

q) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+3)(x+4)(x+8)}{x^4+x-11}$;

r) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x+3}{|2x-4|}$;

s) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(-1)^{E(x)}\cos x}{x^2}$;

t) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-9}\right)$;

u) $\lim\limits_{x\to 0}(-1)^{E(x)}\cdot \frac{x^2+2x+2\sin\frac{x}{2}}{x^2+1}$;

v) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$;

w) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

x) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)\right]$;

y) $\lim\limits_{x\to\infty} 3^{-x}\cos 5x$;

z) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+5x-7}{x^2-5x+8}$.

3. Vypočítajte nasledujúce limity funkcií:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x^2}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 6x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \operatorname{cotg} x$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x+\sin 7x}{\sin 3x}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)}$;

h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x}$;

j) $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$;

k) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot \sin\frac{\pi}{x}$;

l) $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{-x}\sin 2\pi x$;

m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

n) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$, $m,n\in\mathbb{N}$;

o) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{1-4\sin^2 x}{\cos 3x}$;

p) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 8x}{\sin 9x}$;

q) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$;

r) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$.

4. Vypočítajte nasledujúce limity funkcií:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}\right)^x$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to a} \frac{e^x-e^a}{x-a}$, $a\in\mathbb{R}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1}{x-1}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$;

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+4}{3x^3-5}\right)^{x^2}$;

ch) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos^2 x)^{\frac{1}{x}}$;

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+2x}{2+5x}\right)^{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}}$;

k) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{5}^+}\left(\frac{3-2x}{2+5x}\right)^{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}}$;

l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-3^x}{\sin 3x}$;

m) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-3^x}{\sin 3x}$;

n) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

o) $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}$;

ô) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}$;

p) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)$, $a>0$;

q) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$;

r) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{2+x}}$;

s) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$;

t) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e^x-e^{-x}}$;

u) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+3x+2}$;

v) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x}$;

w) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x\sin x}$;

x) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+4}{3x^2-5}\right)^{x^2}$;

y) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\arcsin x}{\cos x-\cos 3x}$;

z) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{cotg} x}$.

4.3 Spojitosť funkcie

1. Dodefinujte dané funkcie tak, aby boli spojité na celom $\mathbb{R}$ (ak je to možné):

a) $f(x)=\frac{2^x-3^x}{x}$;

b) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$;

c) $f(x)=\frac{|x|}{x}$;

d) $f(x)=\frac{5x^2-3x}{2x}$;

e) $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

f) $f(x)=\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$;

g) $f(x)=\frac{x^3-x^2}{2|x-1|}$;

h) $f(x)=1-2^{\frac{1}{x}}$;

i) $f(x)=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$;

j) $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$;

k) $f(x)=\frac{x^2+4x-7}{x^3+5x^2+6x}$;

l) $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$.

2. Dodefinujte dané funkcie tak, aby boli spojité v bode $x_0=0$ (ak je to možné):

a) $g(x)=\frac{2x^2-6x}{x^2+1}\sin\frac{4}{x}$;

b) $g(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

c) $g(x)=(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

d) $g(x)=(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

e) $g(x)=x^2+e^{-\frac{1}{x^2}}-1$;

f) $g(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

4. Určte čísla $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby dané funkcie boli spojité na celom $\mathbb{R}$.

a) $f_1(x) = \begin{cases} ax^2 - 2, & x < 1 \\ 3x - a, & x \geq 1 \end{cases};$ b) $f_2(x) = \begin{cases} ax, & x < 1 \\ 2 - \frac{x}{a}, & x \geq 1 \end{cases};$

c) $f_3(x) = \begin{cases} a - x^2, & x \leq 0 \\ x + 2, & x \in (0, 2) \\ 3x + b, & x \geq 2 \end{cases};$ d) $f_4(x) = \begin{cases} x^2 - a, & x \leq b \\ x + 2, & x \in (b, a) \\ 3x + b, & x \geq a \end{cases}.$

4.4 Ďalšie vlastnosti funkcií

1. Zistite, či rovnica $x^3 - 6x + 3 = 0$ má v intervale $\langle -3, -2 \rangle$ reálny koreň. Ak áno, určte ho s presnosťou menšou ako $0,05$.

2. Nadobúda funkcia $f(x) = \log_3 x - 2^x + 4$ na intervale $\langle 1, 3 \rangle$ hodnotu -1?

3. Zistite, či je daná funkcia prostá. Ak áno, nájdite k nej inverznú funkciu a určte definičné obory obidvoch funkcií.

a) $f(x) = \log_2(x - 3) + 5;$ b) $f(x) = x^4 - 1;$

c) $f(x) = e^{x-1} - 1;$ d) $f(x) = e^{1-x^2} - 1;$

e) $f(x) = \sqrt{|x - 1|};$ f) $f(x) = \frac{1-x}{1+x};$

g) $f(x) = \frac{3-\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}};$ h) $f(x) = 3^{5-\operatorname{arctg}(2x+1)};$

i) $f(x) = 2 - \arccos(4x + 3);$ j) $f(x) = -4 + 3\sqrt{x}.$

5 Diferenciálny počet funkcie jednej reálnej premennej

5.1 Derivácia funkcie

1. Z definície nájdite deriváciu funkcie f v bode x_0, ak

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $x_0 = 2$;

b) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

c) $f(x) = \sin^2 \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = 0$;

d) $f(x) = x^3 \sin(x - \frac{\pi}{4})$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

e) $f(x) = \ln(1 + |x|)$, $x_0 = 0$;

f) $f(x) = x + (x-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$, $x_0 = 1$;

g) $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x \cdot \cos \frac{5}{x} + 2x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $\quad x_0 = 0$;

h) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x^2 \cdot \cos \frac{1}{9x}\right) + 2x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $\quad x_0 = 0$.

2. Z definície nájdite deriváciu funkcie g na množine (na ktorej to má zmysel), ak

a) $g(x) = \operatorname{cotg} x$;

b) $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;

c) $g(x) = e^{-x}$;

d) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

3. Určte deriváciu funkcie $y = f(x)$ (a upravte !!!), ak

a) $y = \sqrt[3]{x^2 \sqrt{x^4 \sqrt{x^3}}}$;

b) $y = \frac{1}{\sqrt{6x - x^2}}$;

c) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

d) $y = \frac{\cos x^2}{\cos^2 x}$;

e) $y = \sin(\sin(\sin x))$;

f) $y = \log_x \cos x$;

g) $y = \ln \cos \sqrt{e^x + 1}$;

h) $y = e^{\sin x} \sin x$;

ch) $y = \operatorname{arccotg} \ln \frac{1}{x}$;

i) $y = \ln \cos \frac{x-1}{x}$;

j) $y = \arcsin\left(\frac{2x+3}{5-3x}\right)$;

k) $y = \frac{x^3}{1+x^6} - \operatorname{arctg} x^3$;

l) $y = \cos \sqrt{\frac{1}{1+x}}$;

m) $y = \frac{\sin x + x \cos x}{\cos x + x \sin x}$;

n) $y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$;

o) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$;

p) $y = \frac{\sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}}$;

q) $y = \sqrt{x-1} \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$;

r) $y = \mathrm{e}^x(\cos x + \arcsin x)$;

s) $y = \ln \operatorname{cotg} \frac{x}{3}$;

t) $y = (\arccos \mathrm{e}^x)^2$;

u) $y = 5^{\frac{4}{\operatorname{cotg} x}}$;

v) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$;

w) $y = e^{\sin^2(x^3)}$;

x) $y = \sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt[3]{4x+1}}}$;

y) $y = 2^{-x^2} + \ln \frac{1}{\sqrt{x}}$;

z) $y = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

4. Určte deriváciu funkcie $y = f(x)$ (a upravte !!!), ak

a) $y = \ln \ln \ln x$;

b) $y = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x^2}$;

c) $y = \frac{x \ln x}{1 + \ln x}$;

d) $y = \operatorname{tg} \operatorname{arccotg} x$;

e) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

f) $y = \sqrt{\mathrm{e}^{5x}}$;

g) $y = \frac{1}{\ln^2 x}$;

h) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$;

i) $y = \ln^2 x - \ln \ln x$;

j) $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$;

k) $y = \ln \arcsin 5x$.

5. Určte deriváciu funkcie $y = f(x)$ (a upravte !!!), ak

a) $y = \frac{x\sqrt{2+x^2}}{2} + \ln\left(x + \sqrt{2+x^2}\right)$;

b) $y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

c) $y = x^{(x^x)}$;

d) $y = \sqrt{1 + 2x - x^2} - \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}}$;

e) $y = -\frac{x+1}{2} + \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x$;

f) $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$, $a \neq 0$;

g) $y = \ln \frac{x^2+1+x\sqrt{2}}{x^2+1-x\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$;

h) $y = x^{x^2}$;

ch) $y = \ln \frac{1-\sqrt{\sin x}}{1+\sqrt{\sin x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\sin x}$;

i) $y = x^{\ln x}$;

j) $y = \frac{1}{3(1+x^3)} + \frac{1}{3} \ln \frac{x^3}{1+x^3}$;

k) $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$;

l) $y = \frac{(x+5)^2 (x-4)^3}{(x+2)^5 (x+4)^2}$;

m) $y = (x+5)^2 (2x+7)^3 (x-2)(x-3)$;

n) $y = \operatorname{arctg}^4 \sqrt{x}$;

o) $y = \frac{1}{8} \ln \frac{x^8-1}{x^8+1}$;

ô) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$;

p) $y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{1+x^4}$;

r) $y = \sqrt{|x-1|}$;

s) $y = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

t) $y = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \ln(1+x), & x \geq 0 \end{cases}$;

u) $y = \frac{x \mathrm{e}^x \operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}$;

v) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$;

w) $y = \sqrt[x]{x}$;

x) $y = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ \operatorname{arctg} x, & x > 0 \end{cases}$; y) $y = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

z) $y = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$; ž) $y = \sqrt{a^2 - x^2} - a \cdot \arccos \frac{x}{a}$, $a \neq 0$.

6. Určte $A, B, C \in \mathbb{R}$ tak, aby na zadanej množine M platil daný vzťah:

a) $M = \mathbb{R}$

$$\left[A + x - \operatorname{arctg} x + \left(\frac{1}{2}(1 + x^2)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x\right)\left(\ln(1 + x^2) - 1\right)\right]' = (Ax+B) \operatorname{arctg} x \cdot \ln(1+x^2);$$

b) $M = (0, +\infty)$

$$\left[\log\left(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}\right) + \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right]' = C \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^4 x}}.$$

7. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode A, ak

a) $y = \frac{12}{x}$, A $= [3, ?]$; b) $y = \sqrt{x}$, A $= [5, ?]$; c) $y = \ln(1+x)$, A $= [0, ?]$.

8. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $y = f(x)$, ak

a) $y = x^2 - 2x + 3$ a dotyčnica je kolmá na priamku $x + y - 1 = 0$;

b) $y = \frac{x}{x-1}$ a dotyčnica je rovnobežná s priamkou $x + y - 2 = 0$;

c) $y = x \ln x$ a normála je rovnobežná s priamkou $2x - 2y + 3 = 0$;

d) $y = \ln x$ a normála je kolmá na priamku $x - y + 5 = 0$;

e) $y = \cos 2x$ a dotyčnica je rovnobežná s osou x.

9. Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$, ktorá prechádza bodom A, ak

a) $y = x^2 - 2x + 9$, A $= [1, 9]$; b) $y = x^2 - 6x + 11$, A $= [1, -3]$.

10. Nájdite uhol, pod ktorým pretína graf funkcie $y = f(x)$ os x, ak

a) $y = \operatorname{tg} 2x$; b) $y = \mathrm{e}^x - 1$; c) $y = \sin x$.

11. Nájdite také čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, aby

a) sa priamka $y = 2x - 1$ dotýkala grafu funkcie $y = x^2 + \alpha x + \beta$ v bode A $= [1, ?]$;

b) graf funkcie $y = \frac{\beta x - x^3}{4}$ pretínal os x pod uhlom $\frac{\pi}{4}$;

c) sa priamka $y = x$ dotýkala grafu funkcie $y = \alpha^x$.

5.2 Diferenciál funkcie a derivácia vyšších rádov

1. Dokážte, že funkcia $y = c_1\mathrm{e}^x \cos x + c_2\mathrm{e}^x \sin x + c_3\mathrm{e}^{-x} \cos x + c_4\mathrm{e}^{-x} \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, kde c_1, c_2, c_3, c_4 sú ľubovoľné reálne čísla vyhovuje diferenciálnej rovnici $y^{(4)} + 4y = 0$.

2. Nájdite deriváciu n-tého rádu funkcie $y = f(x)$, ak

a) $y = \ln(x + a)$, $a \in \mathbb{R}$; b) $y = \sqrt{1 + x}$.

3. Dokážte, že každé $x > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

a) $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left(\ln x - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n}\right)$; b) $\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$.

4. Určte približné hodnoty nasledujúcich čísel: $\ln 0,9$; $\operatorname{tg} 46°$; $\arcsin 0,54$; $2^{1,002}$; $\sqrt[4]{17}$.

5. Dokážte, že pre $a, b > 0$ také, že b je podstatne menšie ako a^n, $n \in \mathbb{N}$ platí približný vzťah $\sqrt[n]{a^n + b} \doteq a + \frac{b}{na^{n-1}}$. Pomocou tohto vzťahu určte približnú hodnotu $\sqrt[3]{217}$.

5.3 Aplikácie diferenciálneho počtu

1. Dokážte, že rovnice $x^5 + 3x - 6 = 0$ a $2x^3 + 3x^2 + 6x - 10 = 0$ majú jediné reálne riešenie a nájdite nejaký interval, v ktorom sa toto riešenie nachádza.

2. Zistite, či platí Lagrangeova veta pre funkciu $y = f(x)$ na uvedenom intervale a nájdite príslušný bod c, ak

a) $y = \ln x$, $x \in \langle 1, b\rangle$, $b > 1$; b) $y = x + \frac{1}{x}$, $x \in \langle 1, 2\rangle$;

c) $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \langle 0, 1\rangle$; d) $y = \arcsin x$, $x \in \langle 0, 1\rangle$;

e)

$$y = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & x \le 1, \\ \frac{1}{x}, & 1 < x, \end{cases} \quad x \in \langle 0, 2\rangle.$$

3. V akom bode krivky $y = 4 - x^2$ je dotyčnica rovnobežná s priamkou p prechádzajúcou bodmi $X = [-2, 0]$, $Y = [1, 3]$?

4. Odhadnite hodnoty nasledujúcich čísel: $\ln \frac{6}{7}$; $\log_3 25$; $\arcsin 0,5$; $\operatorname{arctg} 0,9$.

5. Dokážte, že daná funkcia $y = g(x)$ je konštantná na uvedenej množine M a nájdite túto konštantu, ak

a) $y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2} \arcsin x, \quad M = (-1, 1);$

b) $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} - 2\operatorname{arctg} x, \quad M = (0, +\infty);$

c) $y = \arcsin x + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad M = (0, 1);$

d) $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}, \quad M = (-1, +\infty).$

6. Dokážte, že platí:

a) $\operatorname{arctg} x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ pre každé $x \in \mathbb{R}$;

b) $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$ pre každé $x \in \mathbb{R}$;

c) $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - 2\operatorname{arctg} x = 0$ pre každé $|x| < 1$;

d) $na^{n-1} < \frac{b^n - a^n}{b-a} < nb^{n-1}$ pre $0 < a < b$ a $n \in \mathbb{N}$;

e) $\frac{\alpha-\beta}{\cos^2 \beta} \leq \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta \leq \frac{\alpha-\beta}{\cos^2 \alpha}$ pre $0 < \beta \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$;

f) $\sin x < x$ pre každé $x \in (0, \frac{\pi}{2})$;

g) $2x \cdot \operatorname{arctg} x \geq \ln(1+x^2)$ pre každé $x \in \mathbb{R}$;

h) $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a < b - a$ pre $b > a \geq 0$;

i) $\mathrm{e}^x > \mathrm{e} \cdot x$ pre každé $x > 1$;

j) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ pre každé $x > 1$;

k) $1 + \frac{1}{1+\mathrm{e}} < \ln(1+\mathrm{e}) < 1 + \frac{1}{\mathrm{e}}$;

l) $\ln x \leq \frac{x}{\mathrm{e}}$ pre každé $x > 0$;

m) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ pre každé $x > 0$;

n) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pre každé $|x| \leq 1$;

o) $\ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ pre každé $x > 0$;

p) $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ pre každé $x > 0$;

q) $\mathrm{e}^x \leq 1 + x\mathrm{e}^x$ pre každé $x \in \mathbb{R}$;

r) $x \geq 1 - \mathrm{e}^{-x}$ pre každé $x \in \mathbb{R}$.

7. Nájdite $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby

a) bod $A = [2, 8]$ bol inflexným bodom funkcie $f : y = ax^3 + bx^2$;

b) funkcia $g : y = a \ln x + bx^2 + x$ mala extrémy v bodoch $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$.

8. Nájdite číslo, ktoré sčítané so svojím štvorcom dáva najmenší súčet.

9. Rozložte číslo 12 na dva sčítance tak, aby súčet ich štvorcov bol najmenší.

10. Rozložte číslo 36 na súčin dvoch činiteľov, ktoré majú najmenší súčet štvorcov.

11. Nájdite obdĺžnik daného obvodu o, ktorý má najväčší obsah.

12. Do kružnice k vpíšte rovnoramenný trojuholník s najväčším obsahom.

13. Aké sú rozmery otvoreného bazéna so štvorcovým dnom, ktorého objem je 32 m^3, ak na jeho vymurovanie máme spotrebovať čo najmenej materiálu?

14. Plotom dlhým 120 m musíme ohradiť záhradu priliehajúcu k domu tak, aby jej plocha bola najväčšia. Nájdite rozmery záhrady.

15. Aké rozmery má mať konzerva objemu 1 liter v tvare valca, aby sme na jej výrobu spotrebovali čo najmenej materiálu?

16. Učiteľ dovolil študentom, aby si zvolili prirodzené číslo n s tým, že každý študent, ktorý bude mať z testu aspoň $100\left(1 - \frac{12n}{10n^2+21}\right)$ bodov, urobí úspešne skúšku. Aká hodnota n je pre študentov najvýhodnejšia?

17. Pri testovaní stroja sa zistilo, že jeho výkon závisí od nastavenia hodnoty x podľa vzťahu $-x^2 + 14x - 10$. Ako treba nastaviť hodnotu x, aby výkon stroja bol maximálny?

18. Vyšetrite priebeh funkcie $y = f(x)$, ak

a) $y = 3x^4 - 4x^3$; b) $y = x^3 - 3x^2 + 5$;

c) $y = \frac{2x}{4-x^2}$; d) $y = \frac{10x}{(x+2)^2}$;

e) $y = \frac{x^3-2}{x}$; f) $y = \frac{x^2+2x+1}{x+2}$;

g) $y = \frac{1}{1+x^2}$; h) $y = \frac{x}{x^2+1}$;

ch) $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$; i) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$;

j) $y = x \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$; k) $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$;

l) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$; m) $y = \frac{|x-1|}{x+2}$;

n) $y = \frac{x^2-x}{x+1}$; o) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$;

p) $y = e^{-x^2}$; q) $y = 16x(x-1)^3$;

r) $y = \frac{1+\ln x}{x}$; s) $y = \frac{x^2}{x-2}$;

t) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$; u) $y = \frac{x^2}{x^2-4}$.

19. Vyšetrite priebeh funkcie $y = f(x)$, ak

a) $y = x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$; b) $y = x + \mathrm{e}^{-x}$;

c) $y = \ln(1+x^2)$; d) $y = \ln(x^2-4)$;

e) $y = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x+1}$; f) $y = x\ln x$;

g) $y = \frac{x}{\ln x}$; h) $y = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1}$;

i) $y = \frac{\ln x^2}{x}$; j) $y = \ln\frac{x+2}{x^2+2x+1}$;

k) $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$; l) $y = \arcsin|x|$;

m) $y = (1-3x)\mathrm{e}^{2x}$; n) $y = \sqrt[3]{3x^2-x^3}$;

o) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$; p) $y = x^2 - 2|x|$;

q) $y = \frac{5(x-2)}{x^2}$; r) $y = \frac{x^2-3x}{x+1}$;

s) $y = \frac{2x^3}{x^2-1}$; t) $y = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$;

u) $y = \frac{2x}{(x-1)^2}$; v) $y = x + \frac{1}{x-2}$;

w) $y = e^x(x-1)$; x) $y = \frac{2x^2}{x^2+1}$;

y) $y = \frac{2}{\mathrm{e}^x-3}$; z) $y = \frac{3x}{x^2-9}$.

20. Vypočítajte nasledujúce limity:

a) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3a}}$, $a\in\mathbb{R}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$, $a,b\in\mathbb{R}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\operatorname{tg} ax)}{\ln(\operatorname{tg} bx)}$, $a,b\in\mathbb{R}$; f) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$, $m,n\in\mathbb{R}$; h) $\lim\limits_{x\to a}[\arcsin(x-a)\cdot\operatorname{cotg}(x-a)]$, $a\in\mathbb{R}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$; j) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$;

k) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; l) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$;

m) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{cotg}x}$; n) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{\sin x}\right)$;

o) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x - x}{e^{2x}+\cos 2x-2}$;

p) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-2x-1}{\sin^2 3x}$;

q) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cdot 2^x}{2^x-1}$;

r) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{2\operatorname{tg} 3x}$;

s) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln^x \frac{1}{x}$;

t) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$;

u) $\lim\limits_{x\to 1^-} [\ln x \cdot \log(1-x)]$;

v) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$;

w) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$;

x) $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\cos \frac{\pi x}{2}\right)^{\log x}$;

y) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x(e^x+1)-3(e^x-1)}{x^3}$;

z) $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{1-x}\right)$;

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\frac{\pi}{2}-x)}{\operatorname{tg} x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1} \left[(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x\right]$;

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$;

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1-\operatorname{tg} x}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}}\right)$.

21. Nájdite Taylorov polynóm stupňa n funkcie $y=f(x)$ v bode a, t.j. $\mathrm{T}_n(f,a;x)$, ak

a) $f(x)=x^x-1$, $a=1$, $n=3$;

b) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $a=1$, $n=4$;

c) $f(x)=e^{2x-x^2}$, $a=0$, $n=4$;

d) $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$, $a=0$, $n=3$;

e) $f(x)=e^{\sin x}$, $a=0$, $n=3$;

f) $f(x)=xe^{-x}$, $a=0$, $n=4$.

22. Nájdite Taylorov polynóm stupňa n (n ľubovoľné prirodzené číslo) funkcie $y=f(x)$ v bode a, t.j. $\mathrm{T}_n(f,a;x)$, ak

a) $f(x)=x\ln x$, $a=1$;

b) $f(x)=\frac{1}{2^x}$, $a=0$;

c) $f(x)=\frac{1}{1+2x}$, $a=\frac{1}{2}$;

d) $f(x)=\sqrt{1+x}$, $a=0$.

23. Pre funkciu $f: y=e^x$

a) nájdite $\mathrm{T}_n(f,0;x)$;

b) vypočítajte hodnotu čísla e s presnosťou (chybou) menšou ako 10^{-8};

c) s akou presnosťou vypočítame číslo e, ak zoberieme piaty Taylorov polynóm?

24. Pre funkciu $f: y=\ln(1+x)$

a) nájdite $\mathrm{T}_n(f,0;x)$;

b) vypočítajte hodnotu čísla $\ln 1,3$ s presnosťou (chybou) menšou ako $0,003$;

c) s akou presnosťou vypočítame číslo $\ln 1,3$, ak zoberieme siedmy Taylorov polynóm?

6 Mocninové rady

6.1 Polomer a obor konvergencie, súčet mocninových radov

1. Nájdite obor konvergencie a súčet nasledujúcich funkcionálnych radov:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^n$;

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x+x^2}\right)^n$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;

f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4+\sqrt{x}}\right)^n$.

2. Nájdite polomer konvergencie a obor konvergencie nasledujúcich mocninových radov:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n-1)}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5^n}\, x^n$;

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\, x^{3n}$;

f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2}$;

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\sqrt{n}}\, x^n$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n-1) 5^{n-1} x^{n-1}$;

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-8)^n}{3^n n}$;

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{2^n}}\, x^n$;

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$;

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}} (x+2)^n$;

n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(n+1)} (x-4)^n$;

o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{(2n+1)^2}$;

p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+2}} (x-2)^n$;

q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n} (x+1)^n$;

r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$;

s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}}$;

t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+2n} (x+1)^n$;

u) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\ln^n(n+1)}$;

v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n}{3n^2+1} \left(\frac{x-2}{5}\right)^n$;

w) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;

x) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n(n+1)(n+2)}$.

3. Derivovaním vhodného mocninového radu člen za členom nájdite súčet nasledujúcich radov:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n!}\, x^{2n}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}\, x^{n-1}$;   d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$;

e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, x^{2n}$;   f) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} 2^{n-1}\, n\, x^{n-1}$.

4. Derivovaním vhodného mocninového radu člen za členom a vhodnou voľbou x nájdite súčet nasledujúcich číselných radov (návod - uvažujte mocninové rady z úlohy číslo 7):

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$;   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} n$;   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$.

6.2 Taylorove rady

1. Nájdite Taylorov rad funkcie $y = f(x)$ so stredom v bode a a určte jeho obor konvergencie, ak

a) $y = e^{-x}\,, \quad a = 0$;   b) $y = \sin^2 x\,, \quad a = 0$;

c) $y = \dfrac{x}{1-x}\,, \quad a = 0$;   d) $y = \dfrac{5x-4}{x+2}\,, \quad a = 0$;

e) $y = \dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}\,, \quad a = 0$;   f) $y = \dfrac{1}{x(1+x)(1-x)}\,, \quad a = 2$;

g) $y = \dfrac{1}{x+3}\,, \quad a = 4$;   h) $y = \sin x\,, \quad a = \dfrac{\pi}{6}$;

i) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \quad a = 0$;   j) $y = \ln x\,, \quad a = 3$;

k) $y = x \sin 2x\,, \quad a = 0$;   l) $y = \dfrac{x^3+2x}{x^2-2}\,, \quad a = 0$;

m) $y = \dfrac{1}{(1+x)^3}\,, \quad a = 0$;   n) $y = x\, e^{-2x}\,, \quad a = 0$;

o) $y = \ln(1+x-2x^2)\,, \quad a = 0$;   p) $y = \dfrac{x}{(x-1)(x-2)}\,, \quad a = 0$;

q) $y = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}\,, \quad a = 3$;   r) $y = \dfrac{x}{1-x-2x^2}\,, \quad a = 0$;

s) $y = \dfrac{x}{2x+6}\,, \quad a = -1$;   t) $y = \dfrac{x+9}{9-x^2}\,, \quad a = -1$;

u) $y = \ln(1+3x+2x^2), \quad a = 0$;   v) $y = \dfrac{5}{(x-3)^2}\,, \quad a = 5$;

w) $y = x\ln(1+x^2)\,, \quad a = 0$;   x) $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{1+2x}{1-x}}\,, \quad a = 0$;

y) $y = \dfrac{3x-2}{x-2}\,, \quad a = -1$;   z) $y = \dfrac{1}{x^2-x-12}\,, \quad a = 0$.

Literatúra

[1] B.P. Děmidovič: *Sbírka úloh a cvičení z matematickej analýzy*, Fragment, Brno, 2003, ISBN 80–7200–587–1.

[2] J. Eliáš, J. Horváth, J. Kajan: *Zbierka úloh z vyššej matematiky 1,2*, SVTL, Bratislava, 1966.

[3] Š. Kulcsár, O. Kulcsárová: *Zbierka úloh z matematickej analýzy I.*, UPJŠ, Košice, 2003, ISBN 80–7097–527–1.

[4] Š. Kulcsár, O. Kulcsárová: *Zbierka úloh z matematickej analýzy II.*, UPJŠ, Košice, 2003, ISBN 80–7097–509–1.

[5] O. Hutník, Š. Kulcsár, O. Kulcsárová, I. Mojsej: *Zbierka úloh z matematickej analýzy III. (Postupnosti reálnych čísel)*, UPJŠ, Košice, 2011, ISBN 978–80–7097–884–9.

[6] **ďalšie zdroje žiadajte u cvičiaceho!**